

REPRÉSENTATIONS DE SPRINGER POUR LES GROUPES DE RÉFLEXIONS COMPLEXES IMPRIMITIFS

PRAMOD N. ACHAR ET ANNE-MARIE AUBERT

RÉSUMÉ. À un groupe de réflexions complexe spécial, muni d'un réseau radical au sens de Nebe, nous associons un certain ensemble fini qui doit jouer un rôle analogue à celui de l'ensemble des classes unipotentes d'un groupe algébrique. Dans le cas des groupes imprimitifs, nous en donnons un paramétrage combinatoire en termes des symboles généralisés de Malle et Shoji. Ce résultat fournit un lien entre les travaux de Shoji sur les fonctions de Green pour les groupes de réflexions complexes et ceux de Broué, Kim, Malle, Rouquier, *et al.* sur les algèbres de Hecke cyclotomiques et leurs familles de caractères.

1. INTRODUCTION

Les groupes de réflexions complexes, et surtout ceux dits spéciaux, se sont récemment montrés proches des groupes de Weyl des groupes algébriques dans de nombreux aspects : ils admettent des algèbres de Hecke et des groupes de tresses avec de bonnes propriétés ; leurs caractères se répartissent en “familles” ; et pour certains d'entre eux — les groupes imprimitifs — Shoji a développé une théorie de fonctions de Green [13, 14, 15].

Rappelons que dans le cadre des groupes algébriques réductifs sur un corps fini, les fonctions de Green sont certaines fonctions à valeurs complexes définies sur l'ensemble des éléments unipotents. Elles se calculent par un algorithme, dû à Lusztig et Shoji, qui ne dépend que du groupe de Weyl. Une question naturelle est donc : est-il possible d'effectuer le même algorithme pour les groupes de réflexions complexes ? Cette question est le point de départ des travaux de Shoji, et il a découvert que les nouvelles “fonctions de Green” ainsi obtenues semblent vérifier certaines conditions remarquables d'intégralité et de positivité (en commun avec les “vraies” fonctions de Green), bien qu'elles n'aient pas (encore ?) d'interprétation géométrique.

Cependant, pour démarrer l'algorithme pour les groupes de Weyl, il faut d'abord connaître la correspondance de Springer. Par contre, pour les groupes de réflexions complexes, puisqu'il n'y a ni variété unipotente, ni correspondance de Springer, il faut choisir et imposer sur l'ensemble de représentations irréductibles une structure qui ressemble à celles provenant des correspondances de Springer. Shoji n'a traité que les groupes de réflexions imprimitifs, et il a choisi une structure définie en termes des objets combinatoires dits “symboles.”

Cette circonstance donne lieu à plusieurs questions : Est-ce que la structure choisie par Shoji est préférée ou naturelle en un certain sens, ou bien, est-ce que d'autres choix donneraient lieu à des fonctions de Green différentes de celles de Shoji

Le premier auteur était partiellement appuyé par la subvention DMS-0500873 de la NSF.

mais également valables ? D'autre part, comment peut-on étendre ses résultats au cas primitif (*i.e.*, exceptionnel), où l'on ne peut pas utiliser d'objets combinatoires ?

Le but de cet article est d'essayer de répondre à ces questions. Nous proposons ici une nouvelle construction algébrique qui associe à un chaque groupe de réflexions complexes (muni d'un réseau radiciel) un ensemble qui doit jouer le rôle de l'ensemble de classes unipotentes. Le résultat principal affirme que les symboles de Shoji sont compatibles dans un certain sens avec notre construction, et donc que son choix était bien naturel. D'autre part, notre construction fonctionne également bien pour tous les groupes de réflexions complexes spéciaux, et nous obtenons ainsi les débuts d'une extension des travaux de Shoji aux groupes primitifs.

Nous commençons à la Section 2 par définir tous les objets combinatoires dont nous aurons besoin. La section 3 est consacrée à des rappels sur les groupes de réflexions complexes imprimitifs, leurs représentations, et leurs algèbres de Hecke cyclotomiques. La construction algébrique mentionnée ci-dessus repose sur deux concepts : les représentations spéciales et l'induction tronquée. Nous les traitons aux Sections 4 et 5 respectivement. Nous établissons une compatibilité entre l'induction tronquée et les symboles à la Section 6, et une autre compatibilité entre les représentations spéciales et les sous-groupes paraboliques à la Section 7.

Enfin, à la Section 8, nous définissons, de manière algébrique, une classe de sous-groupes dits *pseudoparaboliques* et puis une classe de représentations dites *de Springer*. (Pour les groupes de Weyl, les représentations de Springer sont celles associées aux systèmes locaux triviaux par la correspondance de Springer ; elles sont donc en bijection avec les classes unipotentes). Ensuite, nous calculons toutes les représentations de Springer de tous les groupes imprimitifs spéciaux. Le Théorème 8.9 en donne un paramétrage en termes des symboles dans le cas des groupes non diédraux, et le Théorème 8.13 traite les groupes diédraux.

2. SYMBOLES ET MULTIPARTITIONS

Soient d et e deux entiers strictement positifs. Dans cette section, nous introduisons certains ensembles d'objets combinatoires (dont les *symboles* et les *multipartitions*) qui dépendent de d et e . Dans la section suivante, nous rappellerons les liens entre ces objets et la théorie des représentations du groupe de réflexions complexes imprimitif $G(de, e, n)$ et de ses algèbres de Hecke cyclotomiques. Pour cette raison, on dira toujours que nos objets combinatoires sont associés au groupe $W = G(de, e, n)$, plutôt qu'aux entiers d et e .

Un *poids* pour W est un élément du quotient $\mathbb{Z}^{de}/(1, \dots, 1)$, dont tout représentant (m_0, \dots, m_{de-1}) a la propriété que $m_i = m_j$ si $i \equiv j \pmod{d}$. Par abus de langage, nous parlerons d'un élément de \mathbb{Z}^{de} comme s'il fût un poids, au lieu de parler du poids dont cet élément-là est un représentant.

En particulier, le poids

$$\mathbf{n}(de, e) = (\underbrace{1, 0, \dots, 0}_{d \text{ coordonnées}}, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{d \text{ coordonnées}}, \dots, \underbrace{1, 0, \dots, 0}_{d \text{ coordonnées}})$$

est appelé le *poids spécial* pour $G(de, e, n)$. Les poids

$$\mathbf{b} = (1, 0, \dots, 0) \quad \text{et} \quad \mathbf{d} = (0, \dots, 0)$$

seront particulièrement utiles.

Soit $\Psi = (\Psi_0, \dots, \Psi_{de-1})$ un de -uplet de suites finies croissantes d'entiers positifs :

$$\Psi_i = (\Psi_i^{(0)} \leq \dots \leq \Psi_i^{(m_i-1)}).$$

Soient r et s deux entiers positifs, et supposons que $\Psi_i^{(0)} \geq s$ pour tout $i \geq 1$. On pose $\Psi' = (\Psi'_0, \dots, \Psi'_{de-1})$, où

$$\Psi'_i = \begin{cases} (0 \leq \Psi_0^{(0)} + r \leq \dots \leq \Psi_0^{(m_0-1)} + r) & \text{si } i = 0, \\ (s \leq \Psi_i^{(0)} + r \leq \dots \leq \Psi_i^{(m_i-1)} + r) & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

On appelle Ψ' le (r, s) -d \acute{e} cal \acute{e} de Ψ . L'op \acute{e} ration de (r, s) -d \acute{e} calage engendre une relation d' \acute{e} quivalence sur l'ensemble des de -uplets de suites finies croissantes d'entiers positifs. Une classe d' \acute{e} quivalence sous cette relation est appel \acute{e} e un (r, s) -pr \acute{e} symbole. De plus, si \mathbf{m} est le poids (m_0, \dots, m_{de-1}) , on dit que Ψ est de poids \mathbf{m} . (Evidemment, ce poids reste invariant sous d \acute{e} calage).

En particulier, le protosymbole de type (r, s) et de poids \mathbf{m} est le (r, s) -pr \acute{e} symbole

$$\Phi = \Phi^{r,s}(\mathbf{m}) = (\Phi_0, \dots, \Phi_{de-1}),$$

où

$$\Phi_i = \begin{cases} (0, r, \dots, (m_i - 1)r) & \text{si } i = 0, \\ (s, r + s, \dots, (m_i - 1)r + s) & \text{si } i > 0. \end{cases}$$

Soit $\tilde{\mathcal{P}}_n$ l'ensemble de de -uplets de partitions dont la somme totale \acute{e} gale n :

$$\tilde{\mathcal{P}}_n = \left\{ \left(\underbrace{(0 \leq \alpha_0^0 \leq \dots \leq \alpha_0^{k_0})}_{\alpha_0}, \dots, \underbrace{(0 \leq \alpha_{de-1}^0 \leq \dots \leq \alpha_{de-1}^{k_{de-1}})}_{\alpha_{de-1}} \right) \left| \sum_{i,j} \alpha_i^j = n \right. \right\}$$

On appelle *rotation* (à l' \acute{e} gard de W) l'application $r : \tilde{\mathcal{P}}_n \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_n$ d \acute{e} finie par

$$(1) \quad r(\alpha_0, \dots, \alpha_{de-1}) = (\alpha_d, \alpha_{d+1}, \dots, \alpha_{de-1}, \alpha_0, \dots, \alpha_{d-1}).$$

L'ensemble des *multipartitions pour W* , ou *W -multipartitions*, est l'ensemble des r -orbites sur $\tilde{\mathcal{P}}_n$.

Evidemment, l'op \acute{e} ration de rotation est triviale dans le cas du groupe $W = G(d, 1, n)$, pour lequel une multipartition n'est autre qu'un d -uplet de partitions. Par contre, les r -orbites sont en g \acute{e} n \acute{e} ral non triviales pour $G(de, e, n)$. Si α est une $G(de, e, n)$ -multipartition, et si $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{P}}_n$ en est un repr \acute{e} sentant, on dit que $\tilde{\alpha}$ est une $G(de, 1, n)$ -multipartition *au-dessus de α* . En g \acute{e} n \acute{e} ral, lorsqu'on a besoin d' \acute{e} crire une $G(de, e, n)$ -multipartition explicitement, on \acute{e} crira plut \hat{t} ot, par abus de notation, une $G(de, 1, n)$ -multipartition au-dessus de celle-l \grave{a} . Nous noterons $\mathcal{P}(de, e, n)$ l'ensemble des $G(de, e, n)$ -multipartitions.

Soit $\alpha \in \mathcal{P}(de, e, n)$, et soit $\tilde{\alpha}$ une $G(de, 1, n)$ -multipartition au-dessus de α . On note $s_e(\alpha)$ le cardinal du centralisateur de $\tilde{\alpha}$ dans le groupe cyclique engendr \acute{e} par r . (Il est clair que $s_e(\alpha)$ est ind \acute{e} pendant du choix de $\tilde{\alpha}$).

Ensuite, soit \mathbf{m} un poids. En ajoutant des "0" suppl \acute{e} mentaires si n \acute{e} cessaire, on peut consid \acute{e} rer $\tilde{\alpha}$ comme un $(0, 0)$ -pr \acute{e} symbole de poids \mathbf{m} . Posons

$$\Lambda = \Lambda_{\mathbf{m}}^{r,s}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha} + \Phi^{r,s}(\mathbf{m}).$$

Bien s \hat{u} r, les divers $\tilde{\alpha}$ donnent lieu \acute{a} divers Λ , et r induit une application (toujours appel \acute{e} e rotation) sur l'ensemble de tous les pr \acute{e} symboles qui s'obtiennent de cette fa \acute{c} on. Le *symbole de type (r, s) et poids \mathbf{m}* associ \acute{e} \acute{a} α est l'ensemble de tous les

présymboles obtenue par cette construction, ce qui est une seule orbite par rotation. On note $Z_{\mathbf{m}}^{r,s}$ l'ensemble des symboles de type (r, s) et de poids \mathbf{m} .

Soit Λ un symbole. Choisissons un représentant (à l'égard de la rotation et du décalage) $(\Lambda_0, \dots, \Lambda_{de-1})$ pour Λ , ainsi qu'un représentant $(m_0, \dots, m_{de-1}) \in \mathbb{Z}^{de}$ de son poids tel que m_i égale le nombre de coefficients de Λ_i . L'ensemble des "positions" dans Λ est

$$\mathcal{S}(\Lambda) = \{(i, j) \mid 0 \leq i < de \text{ et } 0 \leq j < m_i\}.$$

Nous munissons cet ensemble d'un ordre total comme suit :

$$(i, j) \prec (k, l) \quad \text{si} \begin{cases} j < l, & \text{ou} \\ j = l, k > 0 \text{ et } i = 0, & \text{ou} \\ j = l, k > 0 \text{ et } i > k. \end{cases}$$

Un symbole Λ est *distingué* s'il possède un représentant $(\Lambda_0, \dots, \Lambda_{de-1})$ tel que

$$(2) \quad \Lambda_i^{(j)} \leq \Lambda_k^{(l)} \quad \text{si } (i, j) \prec (k, l).$$

(Autrement dit, un peut considérer un représentant d'un symbole comme une application $\mathcal{S}(\Lambda) \rightarrow \mathbb{N}$; le symbole est distingué si cette application est croissante). Il est à noter que cette propriété du représentant est stable sous décalage mais non sous rotation en général.

Deux symboles du même type et du même poids sont dits *similaires* si tous deux possèdent des représentants ayant les mêmes coordonnées avec les mêmes multiplicités. (Puisque les symboles sont définis ici comme provenant des multipartitions, il n'est pas évident que chaque classe de similitude contienne un symbole distingué).

Exemple 2.1. Il y a 22 multipartitions pour $G(3, 1, 3)$:

$$\begin{array}{cccccc} ([3], \emptyset, \emptyset) & ([2], \emptyset, [1]) & ([1], [1^2], \emptyset) & (\emptyset, [3], \emptyset) & (\emptyset, [1^2], [1]) & (\emptyset, \emptyset, [1, 2]) \\ ([1, 2], \emptyset, \emptyset) & ([1^2], [1], \emptyset) & ([1], [1], [1]) & (\emptyset, [1, 2], \emptyset) & (\emptyset, [1], [2]) & (\emptyset, \emptyset, [1^3]) \\ ([1^3], \emptyset, \emptyset) & ([1^2], \emptyset, [1]) & ([1], \emptyset, [2]) & (\emptyset, [1^3], \emptyset) & (\emptyset, [1], [1^2]) & \\ ([2], [1], \emptyset) & ([1], [2], \emptyset) & ([1], \emptyset, [1^2]) & (\emptyset, [2], [1]) & (\emptyset, \emptyset, [3]) & \end{array}$$

Les symboles correspondants de type $(3, 1)$ et de poids $(1, 0, 0)$ sont :

$$\begin{array}{cccccc} \begin{pmatrix} 3 \\ - \\ - \end{pmatrix}^* & \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^* & \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}^* & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}^* & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^* & \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}^* & \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}^* & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^* & \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^* & \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}^* & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}^* & \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}^* & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}^* & \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Les 13 symboles qui portent une étoile sont les symboles distingués.

Un exemple d'une classe de similitude est :

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Exemple 2.2. Pour $G(3, 3, 3)$, l'opération de rotation est non triviale. Voici un ensemble de représentants de ses 8 multipartitions :

$$\begin{array}{cccc} ([3], \emptyset, \emptyset) & ([2], \emptyset, [1]) & ([1, 2], \emptyset, \emptyset) & ([1^2], [1], \emptyset) \\ ([1^3], \emptyset, \emptyset) & ([1^2], \emptyset, [1]) & ([2], [1], \emptyset) & ([1], [1], [1]) \end{array}$$

Les symboles correspondants de type $(3, 0)$ et de poids $(0, 0, 0)$ sont :

$$\begin{array}{cccc} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^* & \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^* & \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^* \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}^* & \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^* & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^* \end{array}$$

Les étoiles désignent toujours les symboles distingués.

3. LES GROUPES IMPRIMITIFS ET LEURS ALGÈBRES DE HECKE

3.1. Les représentations irréductibles du groupe $G(de, e, n)$. Rappelons que le groupe complexe imprimitif $G(e, 1, n)$ est le groupe linéaire complexe sur $V = \bigoplus_{j=1}^n \mathbb{C}e_j$ formé des matrices monomiales dont les coefficients non nuls appartiennent à $\{\zeta_e^j : 0 \leq j \leq e-1\}$, où ζ_e est une racine primitive e -ième de l'unité. Le groupe $G(e, 1, n)$ est donc le produit semi-direct de son sous-groupe de matrices diagonales avec le sous-groupe de matrices de permutations, *i.e.*, $G(e, 1, n) = (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n$. Dans cette représentation, le groupe $G(e, 1, n)$ est engendré par la réflexion t qui envoie e_1 sur $\zeta_e e_1$ et laisse fixes e_2, \dots, e_n et par les matrices de permutations s_i ($1 \leq i \leq n-1$) correspondant aux transpositions $(i, i+1)$.

Soit $\gamma_e : G(e, 1, n) \rightarrow \mathbb{C}$ le caractère linéaire défini par $\gamma_e(t) := \zeta_e$ et $\gamma_e(s_i) := 1$ pour $1 \leq i \leq n-1$.

Soit $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{e-1})$ un e -uplet de partitions de n . Pour tout entier i tel que $0 \leq i \leq e-1$, nous notons n_i la *somme de la partition α_i* (*i.e.*, $n_i := \sum_{j=0}^{k_i} \alpha_i^j$). Les représentations du groupe symétrique \mathfrak{S}_{n_i} peuvent être considérées comme des représentations du groupe $G(e, 1, n_i)$, via la projection naturelle de $G(e, 1, n_i)$ sur \mathfrak{S}_{n_i} . Les classes d'isomorphie des représentations irréductibles de \mathfrak{S}_{n_i} sont paramétrées par les partitions de n_i et nous noterons E_{α_i} une représentation irréductible de \mathfrak{S}_{n_i} correspondant à la partition α_i de n_i . Nous posons $\mathbf{n}_e := (n_0, n_1, \dots, n_{e-1})$ et

$$G(e, 1, \mathbf{n}_e) := G(e, 1, n_0) \times \cdots \times G(e, 1, n_{e-1}).$$

La formule

$$E_{\alpha} := \text{Ind}_{G(e, 1, \mathbf{n}_e)}^{G(e, 1, n)} (E_{\alpha_0} \otimes (E_{\alpha_1} \otimes \gamma_e) \otimes \cdots \otimes (E_{\alpha_{e-1}} \otimes \gamma_e^{e-1}))$$

définit donc une représentation du groupe $G(e, 1, n)$. La représentation E_{α} est irréductible, $E_{\alpha} \not\cong E_{\beta}$ si $\alpha \neq \beta$, et les (classes d'isomorphie) des E_{α} décrivent toutes les (classes d'isomorphie) de représentations irréductibles de $G(e, 1, n)$.

Le groupe $G(de, e, n)$ est un sous-groupe d'indice e de $G(de, 1, n)$, noyau du caractère linéaire γ_{de}^d . Nous allons rappeler la description de ses caractères irréductibles en fonction de ceux du groupes $G(de, 1, n)$.

Remarquons que $s_e(\alpha)$ (voir la Section 2) divise n . La restriction de E_{α} à $G(de, e, n)$ est somme de $s_e(\alpha)$ représentations irréductibles distinctes, nous les notons $E_{\alpha, 1}, \dots, E_{\alpha, s_e(\alpha)}$ et toute représentation irréductible de $G(de, e, n)$ intervient dans la restriction d'une représentation E_{α} pour α un de -uplet de partitions de n . Plus précisément, nous posons

$$\sigma := (s_1 s_2 \cdots s_{n-1})^{n/s_e(\alpha)} \quad \text{et} \quad G(de, e, \mathbf{n}_{de}) := G(de, 1, \mathbf{n}_{de}) \cap G(de, e, n).$$

La restriction à $G(de, e, \mathbf{n}_{de})$ de la représentation

$$E_{\alpha_0} \otimes (E_{\alpha_1} \otimes \gamma_{de}) \otimes \cdots \otimes (E_{\alpha_{de-1}} \otimes \gamma_{de}^{de-1})$$

de $G(de, 1, \mathbf{n}_{de})$ est invariante par σ et s'étend au produit semi-direct $G(de, e, \mathbf{n}_{de}) \rtimes \langle \sigma \rangle$. Les induites à $G(de, e, n)$ des diverses extensions décrivent l'ensemble des composantes irréductibles de la restriction de E_α à $G(de, e, n)$.

3.2. Polynôme de Poincaré et degrés fantômes. Soit $W \subset GL(V)$ un groupe de réflexions complexes et soit $S(V)$ l'algèbre symétrique de V . Nous notons n la dimension de V . L'algèbre des invariants $S(V)^W$ de W dans $S(V)$ est une algèbre de polynômes sur n éléments homogènes algébriquement indépendants de degrés respectifs notés d_1, \dots, d_n ([4]). Le nombre N^* de réflexions de W est égal à $\sum_{i=1}^n (d_i - 1)$.

Le polynôme de Poincaré P_W de W est donné par la formule

$$(X-1)^n \cdot P_W(X) = \left(\frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \frac{\det_V(w)}{\det_V(X-w)} \right)^{-1} = \prod_{i=1}^n (X^{d_i} - 1),$$

où \det_V désigne le déterminant sur V . Pour $W = G(de, e, n)$, on obtient

$$P_{G(de, e, n)}(X) = \frac{X^{dn} - 1}{X - 1} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \frac{X^{dei} - 1}{X^i - 1}.$$

En particulier :

$$P_{G(e, 1, n)}(X) = \prod_{i=1}^n \frac{X^{ei} - 1}{X - 1}, \quad P_{G(e, e, n)}(X) = \frac{X^n - 1}{X - 1} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \frac{X^{ei} - 1}{X - 1}.$$

Soit $S(V)_+^W$ l'idéal de $S(V)^W$ formé des éléments de degrés strictement positifs. Nous notons $S(V)_W := S(V)/(S(V)_+^W \cdot S(V))$ l'algèbre coinvariante de (W, V) . En tant que W -module, $S(V)_W$ est isomorphe à la représentation régulière de W . Soit $S(V)_W = \bigoplus_{j=0}^{N^*} S(V)_W^j$ la décomposition de $S(V)_W$ en ses composantes graduées.

Le degré fantôme d'une représentation irréductible E de W , noté $R_E(X)$, est le polynôme dans $\mathbb{Z}[X]$ défini par

$$(3) \quad R_E(X) := \sum_j m_j(E) X^j,$$

où $m_j(E)$ désigne la multiplicité avec laquelle E apparaît dans le W -module $S(V)_W^j$. On a (voir par exemple [16]) :

$$(4) \quad R_E(X) = (X-1)^n \cdot P_W(X) \cdot \sum_{w \in W} \frac{\det_V(w) \operatorname{Tr}(w, E)}{\det_V(X-w)}.$$

Pour toute partie finie A de \mathbb{N} , nous définissons les polynômes suivants :

$$\Delta(A, X) := \prod_{\substack{a, b \in A \\ b < a}} (X^a - X^b),$$

$$\Theta(A, X) := \prod_{a \in A} \prod_{l=1}^a (X^l - 1).$$

Soit $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{de-1})$ un de -uplet de partitions de n . Pour $0 \leq i \leq de-1$, nous écrivons $\alpha_i = (0 \leq \alpha_i^0 \leq \dots \leq \alpha_i^{k_i})$, nous notons $n_i(\alpha)$ la somme de la

partition α_i , posons

$$c_i(\alpha) := \sum_{l=0}^{k_i} \binom{l}{2},$$

et définissons des parties finies

$$A_i(\alpha) := \{ \bar{\alpha}_i^0, \bar{\alpha}_i^1, \dots, \bar{\alpha}_i^{k_i} \}$$

de \mathbb{N} , où

$$\bar{\alpha}_i^j := \alpha_i^j + j, \quad \text{pour } 0 \leq j \leq k_i.$$

Pour tout multiple m de de , nous poserons $\alpha_{i+m} := \alpha_i$, $c_{i+m}(\alpha) = c_i(\alpha)$ et $A_{i+m}(\alpha) = A_i(\alpha)$.

D'après [7, Remarque 2.10], le degré fantôme $R_{E_\alpha}(X)$ de la représentation irréductible E_α du groupe $G(de, 1, n)$ s'écrit :

$$(5) \quad R_{E_\alpha}(X) = \prod_{h=1}^n (X^{deh} - 1) \cdot \prod_{i=0}^{de-1} \frac{\Delta(A_i(\alpha), X^{de}) \cdot X^{in_i}}{\Theta(A_i(\alpha), X^{de}) \cdot X^{de \cdot c(\alpha_i)}}.$$

D'après [7, p. 806], les représentations irréductibles $E_{\alpha, l}$, pour $l \in \{1, \dots, s_e(\alpha)\}$, ont toutes le même degré fantôme $R_{E_{\alpha, l}}(X) =: R_{E_{\alpha, d}}$, lequel s'écrit

$$R_{E_{\alpha, d}}(X) = \frac{X^{nd} - 1}{X^{nde} - 1} \cdot \frac{1}{s_e(\alpha)} \cdot \sum_{j=0}^{e-1} R_{r^j}(\alpha)(X),$$

où r est définie par ((1)). Puisque

$$r^j(\alpha) = (\alpha_{jd}, \alpha_{jd+1}, \dots, \alpha_{de-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{jd-1}),$$

nous obtenons

$$(r^j \alpha)_i = \alpha_{i+jd}, \quad \text{pour } 0 \leq i \leq de - 1 \text{ et } 0 \leq j \leq e - 1.$$

Le polynôme $R_{E_{\alpha, d}}(X)$ admet donc l'expression

$$\begin{aligned} & \frac{X^{nd} - 1}{X^{nde} - 1} \cdot \frac{1}{s_e(\alpha)} \cdot \sum_{j=0}^{e-1} \left(\prod_{h=1}^n (X^{deh} - 1) \cdot \prod_{i=0}^{de-1} \frac{\Delta(A_{i+jd}(\alpha), X^{de}) \cdot X^{in_{i+jd}(\alpha)}}{\Theta(A_{i+jd}(\alpha), X^{de}) \cdot X^{de \cdot c_{i+jd}(\alpha)}} \right) \\ &= \frac{(X^{nd} - 1)}{s_e(\alpha)} \cdot \prod_{h=1}^{n-1} (X^{deh} - 1) \cdot \sum_{j=0}^{e-1} \prod_{i=0}^{de-1} \frac{\Delta(A_{i+jd}(\alpha), X^{de}) \cdot X^{in_{i+jd}(\alpha)}}{\Theta(A_{i+jd}(\alpha), X^{de}) \cdot X^{de \cdot c_{i+jd}(\alpha)}}. \end{aligned}$$

L'expression

$$\prod_{i=0}^{de-1} \frac{\Delta(A_{i+jd}(\alpha), X^{de})}{\Theta(A_{i+jd}(\alpha), X^{de}) X^{de \cdot c_{i+jd}(\alpha)}}$$

étant indépendante du choix de $j \in \{0, \dots, e - 1\}$, le polynôme $R_{E_{\alpha, d}}(X)$ s'écrit encore

$$\frac{(X^{nd} - 1)}{s_e(\alpha)} \cdot \prod_{h=1}^{n-1} (X^{deh} - 1) \cdot \prod_{i=0}^{de-1} \frac{\Delta(A_i(\alpha), X^{de})}{\Theta(A_i(\alpha), X^{de}) X^{de \cdot c_i(\alpha)}} \cdot \sum_{j=0}^{e-1} \prod_{i=0}^{de-1} X^{in_{i+jd}(\alpha)}.$$

En utilisant les égalités

$$n_{i+jd}(\alpha) = \sum_{l=0}^{k_{i+jd}} (\bar{\alpha}_{i+jd}^l - l) = -\frac{k_{i+jd}(k_{i+jd} + 1)}{2} + \sum_{a \in A_{i+jd}(\alpha)} a,$$

nous voyons que $R_{E_\alpha, d}(X)$ est égal à

$$\frac{(X^{nd} - 1)}{s_e(\alpha)} \cdot \prod_{h=1}^{n-1} (X^{deh} - 1) \cdot \prod_{i=0}^{de-1} \frac{\Delta(A_i(\alpha), X^{de})}{\Theta(A_i(\alpha), X^{de}) X^{de \cdot c_i(\alpha)}} \cdot \sum_{j=0}^{e-1} \prod_{a \in A_{i+jd}(\alpha)} X^{i(a - \frac{k_{i+jd}(k_{i+jd}+1)}{2})}.$$

3.3. Algèbres de Hecke cyclotomiques et familles de caractères. Soit W un groupe de réflexions complexes irréductible fini et soit \mathcal{D} le diagramme qui lui est associé dans [2]. Ceci définit une présentation de W sur un ensemble de générateurs S , avec des “relations d’ordre” $s^{d_s} = 1$ pour $s \in S$, ainsi que des relations homogènes, appelées “relations de tresses”. Le “groupe de tresses” $B = B(W)$ associé à W est par définition le groupe engendré par un ensemble $\{\mathbf{s} : s \in S\}$ en bijection $\mathbf{s} \leftrightarrow s$ avec S , satisfaisant aux relations de tresses de \mathcal{D} . Soit $\mathbf{u} = \{u_{s,i} : s \in S, 0 \leq i \leq d_s - 1\}$ un ensemble de nombres transcendants sur \mathbb{Z} tels que $u_{s,i} = u_{t,i}$ si s et t sont conjugués dans W . L’algèbre de Hecke générique $\mathcal{H}(W, \mathbf{u})$ de W de paramètre \mathbf{u} est définie comme le quotient

$$\mathcal{H}(W, \mathbf{u}) := \mathbb{Z}[\mathbf{u}, \mathbf{u}^{-1}]B/I, \quad \text{avec } I = \left(\prod_{i=0}^{d_s-1} (\mathbf{s} - u_{s,i}) : s \in S \right)$$

de l’algèbre de groupe de B sur $\mathbb{Z}[\mathbf{u}, \mathbf{u}^{-1}]$ par l’idéal I engendré par certaines “relations d’ordre déformées”.

Soient μ_∞ le sous-groupe des racines de l’unité de \mathbb{C} et K un sous-corps du corps $\mathbb{Q}(\mu_\infty)$ de degré fini sur \mathbb{Q} . On note \mathbb{Z}_K l’anneau des entiers de K (c’est un anneau de Dedekind) et $\mu(K)$ le groupe des racines de l’unité de K . Soit ζ un élément de $\mu(K)$. Pour $s \in S$ et $0 \leq i \leq d_s - 1$, nous supposons donnés des entiers relatifs $n_{s,i} \in \mathbb{Z}$. Nous posons $m_{s,i} := n_{s,i}/|\mu(K)|$ et $\mathbf{m}_s := (m_{s,0}, m_{s,1}, \dots, m_{s,d_s-1})$, et nous notons \mathbf{m} l’ensemble $\{\mathbf{m}_s : s \in S\}$. L’algèbre de Hecke ζ -cyclotomique $\mathcal{H}_\zeta^{\mathbf{m}}(W)$ de W est la $\mathbb{Z}_K[q, q^{-1}]$ -algèbre obtenue à partir de $\mathcal{H}(W, \mathbf{u})$ au moyen de la spécialisation $\phi: \mathbb{Z}_K[\mathbf{u}, \mathbf{u}^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}_K[q, q^{-1}]$ définie par

$$\phi: u_{s,i} \mapsto \zeta_{d_s}^i (\zeta^{-1}q)^{m_{s,i}}.$$

Le degré générique d’une représentation irréductible E de W est le polynôme

$$D_E = P_W/c_E$$

quotient du polynôme de Poincaré de W par l’élément de Schur c_E de E .

L’algèbre de Hecke générique $\mathcal{H}(e, 1, n)$ associée au groupe $G(e, 1, n)$ est l’algèbre engendrée sur l’anneau des polynômes de Laurent en $e + 2$ indéterminées :

$$\mathbb{Z}[u_0, u_1, u_0^{-1}, u_1^{-1}, v_0, v_1, \dots, v_{e-1}, v_0^{-1}, v_1^{-1}, \dots, v_{e-1}^{-1}]$$

par des éléments $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, t$ satisfaisant les relations de tresses

$$s_j s_{j+1} s_j = s_{j+1} s_j s_{j+1} \quad \text{et} \quad s_{n-1} t s_{n-1} t = t s_{n-1} t s_{n-1}$$

et les relations relations d’ordre déformées

$$(s_j - u_0)(s_j - u_1) = (t - v_0)(t - v_1) \cdots (t - v_{e-1}) = 0.$$

L'algèbre spésiale de $G(e, 1, n)$ est l'algèbre de Hecke 1-cyclotomique, obtenue par la spécialisation 1-cyclotomique :

$$u_0 \mapsto q, \quad u_1 \mapsto -1, \quad v_0 \mapsto q \quad \text{et} \quad v_i \mapsto \zeta_e^i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq e-1,$$

i.e., l'algèbre $\mathcal{H}_1^{\mathbf{m}}(e, 1, n) = \mathcal{H}_1^{\mathbf{m}}(G(e, 1, n))$, avec $\mathbf{m} = \{\mathbf{m}_{s_1}, \dots, \mathbf{m}_{s_{n-1}}, \mathbf{m}_t\}$, où $\mathbf{m}_{s_j} = (1, 0)$ pour $1 \leq j \leq n-1$ et $\mathbf{m}_t = (1, 0, \dots, 0)$.

L'algèbre de Hecke générique $\mathcal{H}(e, e, n)$ associée au groupe $G(e, e, n)$ est :

- si $n > 2$ ou $n = 2$ et e impair, l'algèbre engendrée sur l'anneau

$$\mathbb{Z}[u_0, u_1, u_0^{-1}, u_1^{-1}]$$

par des éléments $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s'_{n-1}$ satisfaisant les relations

$$s_j s_{j+1} s_j = s_{j+1} s_j s_{j+1} \quad (1 \leq j \leq n-2), \quad s'_{n-1} s_{n-2} s'_{n-1} = s_{n-2} s'_{n-1} s_{n-2},$$

$$s_{n-2} s'_{n-1} s_{n-1} s_{n-2} s'_{n-1} s_{n-1} = s'_{n-1} s_{n-1} s_{n-2} s'_{n-1} s_{n-1} s_{n-2},$$

$$\underbrace{s_{n-1} s'_{n-1} s_{n-1} s'_{n-1} s_{n-1} s'_{n-1} \cdots}_{e \text{ facteurs}} = \underbrace{s'_{n-1} s_{n-1} s'_{n-1} s_{n-1} s'_{n-1} s_{n-1} \cdots}_{e \text{ facteurs}}$$

et $(s'_{n-1} - u_0)(s'_{n-1} - u_1) = (s_j - u_0)(s_j - u_1) = 0$, pour $1 \leq i \leq n-1$;

- si $n = 2$ et e pair, l'algèbre engendrée sur l'anneau

$$\mathbb{Z}[u_0, u_1, v_0, v_1, u_0^{-1}, u_1^{-1}, v_0^{-1}, v_1^{-1}]$$

par des éléments s_1, s'_1 satisfaisant les relations

$$\underbrace{s_1 s'_1 s_1 s'_1 s_1 s'_1 \cdots}_{e \text{ facteurs}} = \underbrace{s'_1 s_1 s'_1 s_1 s'_1 s_1 \cdots}_{e \text{ facteurs}}$$

$$\text{et } (s'_1 - u_0)(s'_1 - u_1) = (s_1 - v_0)(s_1 - v_1) = 0.$$

L'algèbre spésiale de $G(e, e, n)$ est l'algèbre de Hecke 1-cyclotomique, obtenue par la spécialisation 1-cyclotomique :

$$u_0 \mapsto q, \quad u_1 \mapsto -1, \quad v_0 \mapsto q \quad \text{et} \quad v_1 \mapsto -1,$$

i.e., l'algèbre $\mathcal{H}_1^{\mathbf{m}}(e, e, n) = \mathcal{H}_1^{\mathbf{m}}(G(e, e, n))$, avec $\mathbf{m} = \{\mathbf{m}_{s'_1}, \mathbf{m}_{s_1}, \dots, \mathbf{m}_{s_{n-1}}\}$, où $\mathbf{m}_{s'_1} = \mathbf{m}_{s_1} = \dots = \mathbf{m}_{s_{n-1}} = (1, 0)$.

Lusztig a construit une partition des caractères irréductibles d'un groupe de Coxeter fini W en *familles* à l'aide de la théorie des *cellules*. Cette partition apparaît naturellement dans le paramétrage de Lusztig des caractères unipotents d'un groupe réductif sur un corps fini. Pour le moment il n'existe pas de définition de cellules pour les groupes de réflexions complexes et l'on ne peut donc pas utiliser l'approche de Lusztig pour définir les familles de caractères. Dans [12], Rouquier a décrit une approche différente dans laquelle les familles sont définies comme les blocs de d'algèbre de Hecke-Iwahori de W sur un certain anneau $\mathcal{O}(x)$, défini comme suit :

$$\mathcal{O}(x) := \mathbb{Z}_K[x, x^{-1}, (x^m - 1)_{m \geq 1}^{-1}].$$

Nous supposons dorénavant donné un groupe de réflexions complexes W imprimatif et nous fixons une bijection de l'ensemble des caractères irréductibles de W sur celui des caractères irréductibles de $\mathcal{H}_\zeta^{\mathbf{m}}(W)$ et identifions ces deux ensembles via la bijection. Les *familles* des caractères irréductibles sont alors définies (voir [10, Définition 2.4]) comme les blocs de $\mathcal{O}(x)\mathcal{H}_\zeta^{\mathbf{m}}(W)$.

Broué et Kim ont démontré (voir [1, Théorème 3.17]) que les familles de caractères de $G(e, 1, n)$ à l'égard de l'algèbre spésiale sont données par les classes de similitude des symboles de type $(1, 0)$ et de poids \mathbf{b} .

Afin de décrire les familles de caractères de $G(e, e, n)$ à l'égard de l'algèbre spésiale, introduisons la notion de e -partition *bégayante* : une e -partition $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{e-1})$ est dite bégayante si $\alpha_0 = \dots = \alpha_{e-1}$. À toute e -partition bégayante de somme n correspond e familles de caractères de $G(e, e, n)$, chacune réduite à un singleton. Les autres familles de caractères de $G(e, e, n)$ sont données par les classes de similitude des symboles associés à des e -partition non bégayantes, de type $(1, 0)$ et de poids \mathbf{d} (voir [1, Théorème 4.3]).

3.4. Exemples. Les familles de caractères pour les groupes de Weyl classiques $G(2, e, n)$ ($e = 1, 2$) correspondent aux classes de similitude dans $Z_{\mathbf{n}(2,e)}^{1,0}$, et en particulier, les caractères spéciaux correspondent aux symboles distingués.

Les classes unipotentes pour B_n (resp. C_n, D_n) correspondent aux classes de similitude dans $Z_{\mathbf{n}(2,1)}^{2,0}$ (resp. $Z_{\mathbf{n}(2,1)}^{2,1}, Z_{\mathbf{n}(2,2)}^{2,0}$). En particulier, les caractères associés aux systèmes locaux triviaux par la correspondance de Springer correspondent aux symboles distingués.

Les calculs de Broué–Kim [1] et de Kim [5] montrent que les familles de caractères (à l'égard d'une algèbre cyclotomique) de $G(de, e, n)$ sont en bijection avec les classes de similitude de symboles de type $(1, 0)$ et de poids convenable. Dans le cas de l'algèbre spésiale d'un groupe spésial, on sait aussi, d'après Malle, que les caractères spéciaux correspondent aux symboles distingués de type $(1, 0)$.

Exemple 3.1. Considérons le cas très simple du groupe $G(e, 1, 1)$ (lequel est un groupe cyclique d'ordre e). Nous savons déjà par [1, Proposition 2.10(2)] qu'il y a deux familles de représentations irréductibles de $G(e, 1, 1)$, celle réduite à la représentation triviale et celle formée des autres représentations irréductibles. Ce résultat se réinterprète en termes de symboles de la manière suivante. On a

$\Phi^{1,0}(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$. Il y a e multipartitions pour $G(e, 1, 1)$. Les symboles correspondants de type $(1, 0)$ et de poids \mathbf{b} sont

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ - \\ \vdots \\ - \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Lambda_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \\ 1 & \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow 0\text{-ème ligne} \\ \vdots \\ \leftarrow i\text{-ème ligne } (1 \leq i \leq e-1). \\ \vdots \end{array}$$

Les symboles spéciaux sont Λ_0 et Λ_i . Les classes de similitude sont au nombre de deux :

$$\{\Lambda_0\} \quad \text{et} \quad \{\Lambda_i : 1 \leq i \leq e-1\}.$$

D'autre part, la représentation induite $\text{Ind}_{\{1\}}^{G(e,1,1)}(1)$, étant égale à la représentation régulière du groupe $G(e, 1, 1)$, est somme de la représentation triviale et de la représentation $\gamma_e \oplus \gamma_e^2 \oplus \dots \oplus \gamma_e^{e-1}$. Ces deux représentations constituent donc les représentations “constructibles” du groupe $G(e, 1, 1)$.

4. REPRÉSENTATIONS SPÉCIALES

4.1. Les fonctions a et b . Soit W un groupe de réflexions complexes fini, et choisissons une algèbre de Hecke cyclotomique pour W . Si E est une représentation

irréductible de W , on peut considérer la multiplicité de la racine en $q = 0$ de son degré générique et de son degré fantôme. Ces deux entiers, qui sont appelés “ $a(E)$ ” et “ $b(E)$ ”, respectivement, dans la littérature, jouent un rôle très important dans la suite. La représentation E est dite *spéciale* si $a(E) = b(E)$.

Dans le cas où W est imprimitif, ces fonctions ne dépendent que de la multipartition associée à E . Nous écrivons donc “ $a(\alpha)$ ” et “ $b(\alpha)$ ” au lieu de “ $a(E_{\alpha,l})$ ” et “ $b(E_{\alpha,l})$ ”.

Les fonctions a et b permettent aussi de définir la notion, introduite dans [8], de groupe de réflexions complexes fini *spécial* : un groupe de réflexions complexes fini W est dit spécial si l’on a

$$(6) \quad a(E) \leq b(E) \quad \text{pour toute représentation irréductible } E \text{ de } W.$$

D’après [9, Proposition 8.1], la propriété (6) est équivalente au fait que pour toute représentation irréductible E de W , il existe une représentation irréductible spéciale E_0 telle que $a(E) = a(E_0)$. La Proposition 8.1 de [9] fournit d’autres caractérisations des groupes de réflexions complexes finis spéciaux.

L’ensemble des groupes de réflexions complexes finis spéciaux contient en particulier tous les groupes de réflexions complexes finis qui peuvent être définis sur le corps des nombres réels.

Les groupes de réflexions complexes finis spéciaux imprimitifs irréductibles sont les groupes \mathfrak{S}_n , $G(e, 1, n)$ et $G(e, e, n)$ (voir [9, preuve de la Proposition 8.1]).

Nous rappelons maintenant la formule obtenue par Malle [7] pour $b(\alpha)$. Il résulte de l’expression obtenue pour $R_{E_{\alpha,d}}(X)$ que $b(\alpha)$ est égal à

$$(7) \quad ed \sum_{i=0}^{de-1} \left(\sum_{\substack{a,b \in A_i(\alpha) \\ b < a}} b - c_i \right) - \min_{0 \leq j \leq e-1} \sum_{i=0}^{de-1} i \left(\frac{k_{i+jd}(k_{i+jd} + 1)}{2} - \sum_{a \in A_{i+jd}(\alpha)} a \right).$$

Lorsque $W = G(e, 1, n)$ et que la suite $(k_0, k_1, \dots, k_{e-1})$ est telle que $k_0 = k + 1$ et $k_i = k$ si $1 \leq i \leq e - 1$, avec $k \in \mathbb{N}$, la formule (7) donne

$$(8) \quad b(\alpha) = e \sum_{i=0}^{e-1} \sum_{\substack{a,b \in A_i(\alpha) \\ b < a}} b + \sum_{i=0}^{e-1} i \sum_{a \in A_i(\alpha)} a - \sum_{l=0}^{k-1} \binom{el + 1}{2}.$$

Lorsque $W = G(e, e, n)$ et que la suite $(k_0, k_1, \dots, k_{e-1})$ est telle que $k_i = k$ pour tout $i \in \{0, \dots, e - 1\}$, avec $k \in \mathbb{N}$, la formule (7) donne

$$(9) \quad b(\alpha) = e \sum_{i=0}^{e-1} \sum_{\substack{a,b \in A_i(\alpha) \\ b < a}} b + \min_{0 \leq j \leq e-1} \sum_{i=0}^{e-1} i \sum_{a \in A_{i+jd}(\alpha)} a - \sum_{l=0}^{k-1} \binom{el}{2}.$$

4.2. Formules combinatoires pour a et b . Dans cette section, nous introduisons et étudions certaines fonctions combinatoires définies sur l’ensemble de symboles pour un groupe imprimitif. Les quelques derniers énoncés traitent la relation entre ces fonctions combinatoires et les fonctions a et b de la section précédente.

Soit $\alpha \in \mathcal{P}(e, 1, n)$, et soit Λ son symbole de type (r, s) et de poids \mathbf{m} . Si $(i, j) \prec (k, l)$, alors posons

$$\begin{aligned} a^c(\Lambda)_{ij,kl} &= \min(\Lambda_i^{(j)}, \Lambda_k^{(l)}) - \Phi_i^{(j)}, \\ b^c(\Lambda)_{ij} &= \Lambda_i^{(j)} - \Phi_i^{(j)}. \end{aligned}$$

Évidemment, ces entiers dépendent du choix d'un présymbole représentant pour Λ . Par contre, $b^c(\Lambda)_{ij}$ est indépendant de r et de s dans le sens suivant : si l'on change r ou s mais garde la même forme pour le présymbole représentant, alors $b^c(\Lambda)_{ij}$ ne change pas.

En effet, il est clair que $b^c(\Lambda)_{ij}$ n'est autre que $\alpha_i^{(j)}$, mais cette notation sera quand même utile : elle permet de référer aux coefficients d'une multipartition en termes des positions d'un symbole, au lieu de fixer une numérotation de ses coefficients à l'avance.

Enfin, il est à noter que l'on ne définit pas $a^c(\Lambda)_{ij,kl}$ si $(i, j) \not\prec (k, l)$. Ensuite, on pose

$$a^c(\Lambda) = \sum_{(i,j) \prec (k,l)} a^c(\Lambda)_{ij,kl} \quad \text{et} \quad b^c(\Lambda) = \sum_{(i,j) \prec (k,l)} b^c(\Lambda)_{ij}$$

Il est facile de vérifier que $a^c(\Lambda)$ et $b^c(\Lambda)$ sont bien définis. De plus, comme on a remarqué ci-dessus, $b^c(\Lambda)$ est indépendant de r et de s . Il est clair que

$$a^c(\Lambda)_{ij,kl} \leq b^c(\Lambda)_{ij}, \quad \text{avec égalité si et seulement si } \Lambda_i^{(j)} \leq \Lambda_k^{(l)}$$

pour tout symbole Λ . En comparant avec (2), on obtient immédiatement le résultat suivant :

Lemme 4.1. *Soit Λ un symbole. On a que $a^c(\Lambda) \leq b^c(\Lambda)$, avec égalité si et seulement si Λ est distingué.*

Nous remarquons aussi que b^c est "additif" (tandis que a^c ne l'est pas en général) : soient $\beta' \in \mathcal{P}(e, 1, n')$ et $\beta'' \in \mathcal{P}(e, 1, n'')$, et posons $\alpha = \beta' + \beta'' \in \mathcal{P}(e, 1, n' + n'')$. Fixons deux entiers r et s ainsi qu'un poids \mathbf{m} . Il est clair que

$$b^c(\Lambda_{\mathbf{m}}^{r,s}(\alpha))_{ij} = b^c(\Lambda_{\mathbf{m}}^{r,s}(\beta'))_{ij} + b^c(\Lambda_{\mathbf{m}}^{r,s}(\beta''))_{ij},$$

car cette égalité équivaut au fait que $\alpha_i^{(j)} = \beta_i'^{(j)} + \beta_i''^{(j)}$. Le lemme suivant est donc évident.

Lemme 4.2. *Soient $\beta' \in \mathcal{P}(e, 1, n')$ et $\beta'' \in \mathcal{P}(e, 1, n'')$, et posons $\alpha = \beta' + \beta'' \in \mathcal{P}(e, 1, n' + n'')$. Alors*

$$b^c(\Lambda_{\mathbf{m}}^{r,s}(\alpha)) = b^c(\Lambda_{\mathbf{m}}^{r,s}(\beta')) + b^c(\Lambda_{\mathbf{m}}^{r,s}(\beta'')).$$

Comme on l'a déjà remarqué, les poids les plus importants sont \mathbf{b} et \mathbf{d} . Les deux propositions suivantes permettent de comparer a^c et b^c pour des symboles de ces deux poids.

Proposition 4.3. *Si $\alpha \in \mathcal{P}(e, 1, n)$, alors $b^c(\Lambda_{\mathbf{b}}^{r,s}(\alpha)) = b^c(r(\Lambda_{\mathbf{d}}^{r,0}(\alpha)))$.*

Démonstration. Posons $\Lambda = \Lambda_{\mathbf{b}}^{r,s}(\alpha)$ et $\Lambda' = \Lambda_{\mathbf{d}}^{r,0}(\alpha)$. Il sera commode d'écrire les formules pour $b^c(\Lambda)$ et $b^c(r(\Lambda'))$ dans une forme légèrement différente. Posons

$$c(\Lambda)_{ij} = |\{\text{positions } (k, l) \text{ dans } \Lambda \text{ telles que } (i, j) \prec (k, l)\}|;$$

la définition de $c(\mathbf{r}(\Lambda'))_{ij}$ est analogue. On a alors

$$(10) \quad b^c(\Lambda) = \sum_{(i,j)} c(\Lambda)_{ij} b^c(\Lambda)_{ij} \quad \text{et} \quad b^c(\Lambda') = \sum_{(i,j)} c(\mathbf{r}(\Lambda'))_{ij} b^c(\mathbf{r}(\Lambda'))_{ij}.$$

Pour comparer les symboles Λ et Λ' , choisissons des présymboles représentants tels que toute ligne contient m coefficients, à l'exception de Λ_0 , qui contient $m+1$ coefficients. Supposons, sans perte de généralité, que $\Lambda_0^{(0)} = 0$. Évidemment, Λ contient un coefficient de plus que Λ' , dans la position $(0, m)$, laquelle est la plus grande position dans l'ordre \prec . Il est donc évident que

$$c(\mathbf{r}(\Lambda'))_{ij} = c(\Lambda')_{ij} = c(\Lambda)_{ij} - 1.$$

Autrement dit,

$$c(\Lambda')_{ij} = c(\Lambda)_{s(i,j)}$$

où $s(i, j)$ désigne la plus petite position dans Λ (à l'égard de \prec) qui est plus grande que (i, j) . Évidemment, on a que

$$(11) \quad s(i, j) = \begin{cases} (e-1, j) & \text{si } i = 0, \\ (0, j+1) & \text{si } i = 1, \\ (i-1, j) & \text{si } 1 < i < e. \end{cases}$$

D'autre part, si l'on pose $\Phi = \Phi_{\mathbf{b}}^{r,s}$ et $\Phi' = \Phi_{\mathbf{d}}^{r,0}$, alors on a que

$$(12) \quad \mathbf{r}(\Lambda')_i^{(j)} = \begin{cases} \Lambda_{e-1}^{(j)} - s \\ \Lambda_0^{(j+1)} - r \\ \Lambda_{i-1}^{(j)} - s \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbf{r}(\Phi')_i^{(j)} = \Phi'_i^{(j)} = \begin{cases} \Phi_{e-1}^{(j)} - s & \text{si } i = 0, \\ \Phi_0^{(j+1)} - r & \text{si } i = 1, \\ \Phi_0^{(j)} - s & \text{si } 1 < i < e. \end{cases}$$

Il est immédiat que

$$b^c(\mathbf{r}(\Lambda'))_{ij} = b^c(\Lambda)_{s(i,j)}.$$

Puisque $b^c(\Lambda)_{0,0} = 0$, on a que

$$\begin{aligned} b^c(\Lambda) &= \sum_{(i,j)} c(\Lambda)_{i,j} b^c(\Lambda)_{i,j} \\ &= \sum_{(i,j) \neq (0,m)} c(\Lambda)_{s(i,j)} b^c(\Lambda)_{s(i,j)} = \sum_{(i,j)} c(\mathbf{r}(\Lambda'))_{i,j} b^c(\mathbf{r}(\Lambda'))_{i,j} = b^c(\mathbf{r}(\Lambda')). \end{aligned}$$

□

Proposition 4.4. *Si $\alpha \in \mathcal{P}(e, 1, n)$, alors $a^c(\Lambda_{\mathbf{b}}^{r,r}(\alpha)) = a^c(\mathbf{r}(\Lambda_{\mathbf{d}}^{r,0}(\alpha)))$.*

Démonstration. La preuve de cette proposition est très proche de celle de la proposition précédente. Reprenons les notations de cette preuve-là : on pose $\Lambda = \Lambda_{\mathbf{b}}^{r,r}(\alpha)$ et $\Lambda' = \Lambda_{\mathbf{d}}^{r,0}(\alpha)$, et on en choisit des présymboles représentants de la manière décrite au paragraphe qui précède la définition (11) de $s(i, j)$.

Les formules (12), dans le cas où $s = r$, disent précisément que

$$\mathbf{r}(\Lambda')_i^{(j)} = \Lambda_{i'}^{(j')} - r \quad \text{et} \quad \mathbf{r}(\Phi')_i^{(j)} = \Phi_{i'}^{(j')} - r$$

où $(i', j') = s(i, j)$. Il s'ensuit que

$$a^c(\mathbf{r}(\Lambda'))_{ij,kl} = a^c(\Lambda)_{s(i,j),s(k,l)}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} a^c(r(\Lambda')) &= \sum_{(i,j) \prec (k,l)} a^c(r(\Lambda'))_{ij,kl} \\ &= \sum_{(i,j) \prec (k,l)} a^c(\Lambda)_{s(i,j),s(k,l)} = \sum_{\substack{(i,j) \prec (k,l) \\ (i,j) \neq (0,0)}} a^c(\Lambda)_{ij,kl} = a^c(\Lambda), \end{aligned}$$

où la dernière égalité est conséquence du fait que $a^c(\Lambda)_{00,kl} = 0$ pour toute position (k, l) . \square

Enfin, nous décrivons la relation entre les fonctions combinatoires a^c et b^c et les fonctions a et b de la section précédente. Le résultat suivant a été établi par Malle [7] :

Proposition 4.5. (1) Si $\alpha \in \mathcal{P}(e, 1, n)$, alors $a(\alpha) = a^c(\Lambda_{\mathbf{b}}^{1,0}(\alpha))$. De plus, E_{α} est spéciale si et seulement si $\Lambda_{\mathbf{b}}^{1,0}(\alpha)$ est distingué.

(2) Si $\alpha \in \mathcal{P}(e, e, n)$, alors $a(\alpha) = a^c(\Lambda_{\mathbf{d}}^{1,0}(\alpha))$. De plus, $E_{\alpha,l}$, où $1 \leq l \leq s_e(\alpha)$, est spéciale si et seulement si $\Lambda_{\mathbf{d}}^{1,0}(\alpha)$ est distingué. \square

L'analogie de cet énoncé pour b et b^c est donné ci-dessous. Il doit être possible (voire, facile) d'en donner une preuve purement combinatoire à partir de la formule (7), mais nous effectuerons une preuve différente plus tard.

Proposition (Voir la Proposition 5.9). Si $\alpha \in \mathcal{P}(e, 1, n)$, alors

$$b(\alpha) = b^c(\Lambda_{\mathbf{b}}^{r,s}(\alpha)) = b^c(r(\Lambda_{\mathbf{d}}^{r,0}(\alpha))).$$

Les deux corollaires suivants sont maintenant des conséquences immédiates des Lemmes 4.1 et 4.2. (Pourtant, nous éviterons d'utiliser ces corollaires avant de terminer la preuve de la proposition précédente).

Corollaire 4.6. Soit $\alpha \in \mathcal{P}(e, 1, n)$, et posons $\Lambda = \Lambda_{\mathbf{m}}^{r,s}(\alpha)$, où \mathbf{m} est égal soit à \mathbf{b} , soit à \mathbf{d} . Alors $a^c(\Lambda) \leq b(\alpha)$, avec égalité si et seulement si Λ est distingué. \square

Corollaire 4.7. Soient $\beta' \in \mathcal{P}(e, 1, n')$ et $\beta'' \in \mathcal{P}(e, 1, n'')$, et posons $\alpha = \beta' + \beta'' \in \mathcal{P}(e, 1, n' + n'')$. Alors $b(\alpha) = b(\beta') + b(\beta'')$. \square

5. L'INDUCTION TRONQUÉE

Soit W un groupe de réflexions complexes, et soit $W' \subset W$ un sous-groupe engendré par réflexions. L'induction tronquée (ou l'induction de MacDonal–Lusztig–Spaltenstein) est une opération qui associe à une représentation irréductible de W' une certaine représentation irréductible de W . Pourtant, cette opération n'est pas toujours définie.

Définition 5.1. Soit W un groupe de réflexions complexes sur l'espace vectoriel V . Une représentation irréductible E de W est dite j -inductible si elle intervient avec multiplicité 1 dans $S^{b(E)}(V)$ (la composante de degré $b(E)$ de l'algèbre symétrique de V).

Proposition 5.2. Soit W un groupe de réflexions complexes, et soit $W' \subset W$ un sous-groupe engendré par réflexions. Soit E' une représentation irréductible j -inductible de W' , considérée comme sous-espace de $S^{b(E')}(V)$, et soit E le plus

petit sous-espace de $S^{b(E')}(V)$ qui contient E' et est W -stable. Alors la W -représentation $E \subset S^{b(E')}(V)$ est irréductible. De plus, $b(E) = b(E')$, et E est elle aussi j -inductible.

Démonstration. La preuve de [3, Theorem 11.2.1] s'étend aux groupes de réflexions complexes. \square

Définition 5.3. La représentation E construite dans la proposition précédente est appelée l'*induite tronquée* de E' , et est notée $j_{W'}^W(E')$ (ou simplement $j(E')$ s'il n'y a aucun risque d'ambiguïté).

Une autre description de l'induite tronquée est comme suit : si E' est j -inductible, alors il y a une unique composante irréductible E de l'induite (ordinaire) $\text{Ind}_{W'}^W E'$ telle que $b(E) = b(E')$. Cette représentation E est l'induite tronquée de E' , voir [3, Proposition 11.2.5]. (Si E' n'est pas j -inductible, E n'est pas forcément unique).

Les deux propositions suivantes sont bien connues.

Proposition 5.4 (Transitivité de l'induction tronquée). *Soit $W'' \subset W' \subset W$ une suite de sous-groupes engendrés par réflexions, et soit E'' une représentation j -inductible de W'' . Alors $j_{W''}^W(E'') = j_{W'}^W(j_{W''}^{W'}(E''))$.*

Proposition 5.5. *Soient W_1 et W_2 deux groupes de réflexions complexes, opérant sur V_1 et V_2 respectivement. Alors $W = W_1 \times W_2$ est un groupe de réflexions complexes sur $V = V_1 \oplus V_2$. Soit E une représentation irréductible de W ; elle se décompose en produit tensoriel $E_1 \boxtimes E_2$, où E_i est une représentation irréductible de W_i , et on a que $b(E) = b(E_1) + b(E_2)$. Alors E est j -inductible si et seulement si E_1 et E_2 le sont.*

Lemme 5.6. *Soit ϵ le caractère signe du groupe symétrique \mathfrak{S}_n , considéré comme représentation de $G(e, 1, n)$. Posons $E = \epsilon \otimes \gamma_e^k$. Alors le degré fantôme de E est*

$$R_E(X) = X^{kn+e(n^2-n)/2}.$$

En particulier, cette représentation est j -inductible.

Démonstration. La partition de n qui correspond au caractère signe de \mathfrak{S}_n est $(1 \leq \dots \leq 1)$, et donc la multipartition de $\epsilon \otimes \gamma_e^k$ est $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{e-1})$, où

$$\alpha_i = \begin{cases} (1 \leq \dots \leq 1) & \text{si } i = k, \\ (0) & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

On a donc

$$A_i(\alpha) = \begin{cases} \{1, 2, \dots, n\} & \text{si } i = k, \\ \{0\} & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

Évidemment, $\Delta(A_i(\alpha), X) = \Theta(A_i(\alpha), X) = 1$ si $i \neq k$. De plus, $n_i(\alpha) = c_i(\alpha) = 0$ si $i \neq k$, tandis que $n_k(\alpha) = n$ et

$$\begin{aligned} c_k(\alpha) &= \sum_{l=0}^{n-1} \binom{l}{2} = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n-1} (l^2 - l) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)n}{2} \right) = \frac{n^3 - 3n^2 + 2n}{6}. \end{aligned}$$

La formule (5) se réduit donc à

$$(13) \quad R_E(X) = \prod_{h=1}^n (X^{eh} - 1) \cdot \frac{\Delta(A_k(\alpha), X^e)}{\Theta(A_k(\alpha), X^e)} \cdot X^{kn-e(n^3-3n^2+2n)/6}.$$

Ensuite, on a que

$$\begin{aligned} \Delta(A_k(\alpha), X^e) &= \prod_{\substack{a, b \in A_k(\alpha) \\ b < a}} (X^{ea} - X^{eb}) = \prod_{j=1}^n \prod_{l=j+1}^n (X^{el} - X^{ej}), \\ \Theta(A_k(\alpha), X^e) &= \prod_{a \in A} \prod_{l=1}^a (X^{el} - 1) = \prod_{j=1}^n \prod_{l=1}^j (X^{el} - 1). \end{aligned}$$

Alors, évidemment, on a que

$$\frac{\Delta(A_k(\alpha), X^e)}{\Theta(A_k(\alpha), X^e)} = \prod_{j=1}^n B_j \quad \text{où} \quad B_j = \frac{\prod_{l=j+1}^n (X^{el} - X^{ej})}{\prod_{l=1}^j (X^{el} - 1)}.$$

Si $j < n$, alors

$$\begin{aligned} B_j &= \frac{(X^{e(j+1)} - X^{ej})(X^{e(j+2)} - X^{ej}) \cdots (X^{en} - X^{ej})}{(X^e - 1)(X^{2e} - 1) \cdots (X^{ej} - 1)} \\ &= \frac{X^{ej(n-j)} \cdot (X^e - 1)(X^{2e} - 1) \cdots (X^{e(n-j)} - 1)}{(X^e - 1)(X^{2e} - 1) \cdots (X^{ej} - 1)}. \end{aligned}$$

Si l'on pose $c_j = X^{ej(n-j)}$ et $B'_j = c_j^{-1} B_j$, alors il est évident que $B'_j B'_{n-j} = 1$ si $1 \leq j < n$; de plus, dans le cas où n est pair, on a que $B'_{n/2} = 1$. Par conséquent,

$$\prod_{i=1}^{n-1} B_j = \prod_{i=1}^{n-1} c_j B'_j = \prod_{i=1}^{n-1} c_j.$$

D'autre part, on a que $B_n = 1 / \prod_{l=1}^n (X^{el} - 1)$. La formule (13) s'écrit donc

$$\begin{aligned} R_E(X) &= \prod_{h=1}^n (X^{eh} - 1) \cdot \prod_{i=1}^n B_j \cdot X^{kn-e(n^3-3n^2+2n)/6} \\ &= \prod_{h=1}^n (X^{eh} - 1) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} c_j \cdot B_n \cdot X^{kn-e(n^3-3n^2+2n)/6} \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} c_j \cdot X^{kn-e(n^3-3n^2+2n)/6} = X^{\sum_{i=1}^{n-1} ej(n-j) + kn - e(n^3-3n^2+2n)/6}. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que

$$\sum_{i=1}^{n-1} ej(n-j) = en \sum_{i=1}^{n-1} j - e \sum_{i=1}^{n-1} j^2 = \frac{e(n^3 - n)}{6},$$

et donc $R_E(X) = X^{kn+e(n^2-n)/2}$. \square

En particulier, on voit que $b(\epsilon \otimes \gamma_e^k) = kn + e(n^2 - n)/2$. La légère généralisation suivante est immédiate :

Corollaire 5.7. Soit $\mathbf{n} = (n_0, \dots, n_m)$ une suite d'entier positifs, et posons $n = n_0 + \dots + n_m$ et $G(e, 1, \mathbf{n}) = G(e, 1, n_0) \times \dots \times G(e, 1, n_m)$. Soit E la représentation $\epsilon \otimes \gamma_e^k$ de $G(e, 1, \mathbf{n})$. Alors

$$b(E) = kn + \frac{e}{2} \sum_{i=0}^m (n_i^2 - n_i).$$

Lemme 5.8. Soit α une partition de n , et soit $\alpha^* = (0 \leq \alpha^{*(0)} \leq \dots \leq \alpha^{*(m)})$ sa partition duale. Posons $\mathfrak{S}_{\alpha^*} = \mathfrak{S}_{\alpha^{*(0)}} \times \dots \times \mathfrak{S}_{\alpha^{*(m)}}$ et $G(e, 1, \alpha^*) = G(e, 1, \alpha^{*(0)}) \times \dots \times G(e, 1, \alpha^{*(m)})$. Soit ϵ le caractère signe de \mathfrak{S}_{α^*} , considéré comme caractère de $G(e, 1, \alpha^*)$ via la projection naturelle $G(e, 1, \alpha^*) \rightarrow \mathfrak{S}_{\alpha^*}$. Alors

$$j_{G(e, 1, \alpha^*)}^{G(e, 1, n)}(\epsilon \otimes \gamma_e^k) = E_{\alpha} \otimes \gamma_e^k.$$

Démonstration. Rappelons les notations de la Section 3.1 : le groupe $G(e, 1, n) = (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ agit sur $V = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}e_i$. On a défini un ensemble de réflexions $\{t, s_1, \dots, s_{n-1}\}$ qui engendrent $G(e, 1, n)$. Les s_i engendrent le sous-groupe \mathfrak{S}_n . D'autre part, posons $T = (\mathbb{Z}/e\mathbb{Z})^n$. T est le plus petit sous-groupe distingué contenant la réflexion t .

Posons $\sigma_h = \sum_{l=0}^h \alpha^{*(l)}$, ainsi que $\sigma_{-1} = 0$. Considérons les éléments suivants de l'algèbre symétrique sur V :

$$(14) \quad \begin{aligned} P_h &= \prod_{\sigma_{h-1} < i < j \leq \sigma_h} (e_i - e_j) & Q_h &= \prod_{\sigma_{h-1} < i < j \leq \sigma_h} \prod_{l=1}^{e-1} (e_i - \zeta_e^l e_j) \\ P &= \prod_{h=0}^m P_h & Q &= \prod_{h=0}^m Q_h \end{aligned}$$

ainsi que

$$R = (e_1 \cdots e_n)^k.$$

Il est clair que \mathfrak{S}_{α^*} agit sur $\mathbb{C} \cdot P$ par le caractère signe, et que Q et R sont \mathfrak{S}_{α^*} -invariants. D'autre part, le produit

$$PQ = \prod_{\substack{0 \leq h \leq m \\ \sigma_{h-1} < i < j \leq \sigma_h}} (e_i^e - e_j^e)$$

est T -invariant, tandis que l'action de T sur $\mathbb{C} \cdot R$ est donnée par le caractère γ_e^k . En résumé,

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{\alpha^*} &\text{ agit sur } \mathbb{C} \cdot P && \text{ par } \epsilon \\ G(e, 1, \alpha^*) &\text{ agit sur } \mathbb{C} \cdot PQ && \text{ par } \epsilon \\ G(e, 1, \alpha^*) &\text{ agit sur } \mathbb{C} \cdot PQR && \text{ par } \epsilon \otimes \gamma_e^k \end{aligned}.$$

Nous démontrons maintenant que $\deg PQR = b(\epsilon \otimes \gamma_e^k)$. Il s'ensuivra que, pour calculer l'induction tronquée de $\epsilon \otimes \gamma_e^k$, il suffit d'étudier explicitement l'action de $G(e, 1, n)$ sur PQR . Pour commencer, considérons P_h : son degré égale le nombre de valeurs distinctes que prend le couple (i, j) dans la formule (14). Puisque $\sigma_h - \sigma_{h-1} = \alpha^{*(h)}$, on voit qu'il y a $\binom{\alpha^{*(h)}}{2}$ valeurs possibles de ce couple-là. Donc

$$\deg P_h = \frac{(\alpha^{*(h)})^2 - \alpha^{*(h)}}{2} \quad \text{et} \quad \deg Q_h = (e-1) \cdot \frac{(\alpha^{*(h)})^2 - \alpha^{*(h)}}{2}.$$

R est évidemment de degré kn , et donc

$$\deg PQR = \deg R + \sum_{h=0}^m \deg P_h Q_h = kn + e \sum_{h=0}^m \frac{(\alpha^{*(h)})^2 - \alpha^{*(h)}}{2}.$$

Selon le Corollaire 5.7, il est bien le cas que $\deg PQR = b(\epsilon \otimes \gamma_e^k)$. En spécialisant au cas où $k = 0$, on voit aussi que $\deg PQ = b(\epsilon)$, où ici on calcule b à l'égard du groupe $G(e, 1, \alpha^*)$.

On peut également calculer $b(\epsilon)$ pour le groupe \mathfrak{S}_{α^*} : dans ce cas, il est bien connu que $b(\epsilon) = \sum((\alpha^{*(h)})^2 - \alpha^{*(h)})/2 = \deg P$.

Les trois polynômes P , PQ , et PQR ont donc les bons degrés pour permettre de calculer certaines induites tronquées. Posons

$$\begin{aligned} F_1 &= j_{\mathfrak{S}_{\alpha^*}}^{\mathfrak{S}_n} \epsilon \subset S^{\deg P}(V) \\ F_2 &= j_{G(e,1,\alpha^*)}^{G(e,1,n)} \epsilon \subset S^{\deg PQ}(V) \\ E &= j_{G(e,1,\alpha^*)}^{G(e,1,n)} (\epsilon \otimes \gamma_e^k) \subset S^{\deg PQR}(V) \end{aligned}$$

F_1 est donc le plus petit \mathfrak{S}_n -sous-module de $S^{\deg P}(V)$ qui contient P , et ainsi de suite. En particulier, $PQ \in F_2$, et $PQR \in E$.

Il est bien connu que F_1 n'est autre que E_α . Ensuite, on peut définir une application \mathfrak{S}_n -équivariante $\phi : S^{\deg P}(V) \rightarrow S^{\deg PQ}(V)$ par $\phi(f) = Qf$. Il est clair que $\phi(F_1)$ est un sous-espace \mathfrak{S}_n -stable de F_2 . D'autre part, puisque PQ est T -stable, il faut que T agisse trivialement sur F_2 , et par conséquent, F_2 est une représentation irréductible de $G(e, 1, n)/T \simeq \mathfrak{S}_n$. On conclut que $\phi(F_1) = F_2$. Puisque la représentation de $G(e, 1, n)$ sur F_2 est isomorphe à E_α , on voit que sa représentation sur $E = R \cdot F_2$ égale $E_\alpha \otimes \gamma_e^k$. \square

Proposition 5.9. *Toute représentation irréductible de $G(e, 1, n)$ est j -inductible. De plus, pour toute $\alpha \in \mathcal{P}(e, 1, n)$, on a que $b(\alpha) = b^c(\Lambda_{\mathbf{b}}^{T,s}(\alpha))$.*

Démonstration. Soit $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{e-1}) \in \mathcal{P}(e, 1, n)$, et pour chaque i , soit n_i la somme de la partition α_i . Posons $\mathbf{n} = (n_0, \dots, n_{e-1})$.

Selon le Lemme 5.8, chaque représentation $E_{\alpha_i} \otimes \gamma_e^i$ est une représentation j -inductible de $G(e, 1, n_i)$, et donc, par la Proposition 5.5, la représentation

$$F = (E_{\alpha_0} \otimes \gamma_e^0) \boxtimes \cdots \boxtimes (E_{\alpha_{e-1}} \otimes \gamma_e^{e-1})$$

de $G(e, 1, \mathbf{n})$ est elle aussi j -inductible. Son induite tronquée fait partie de son induite ordinaire, mais d'autre part, on sait que son induite ordinaire est déjà irréductible (c'est E_α). Il s'ensuit que E_α est l'induite tronquée de F . Selon la Proposition 5.2, la représentation E_α est donc elle aussi j -inductible.

Il reste à établir la formule pour $b(\alpha)$. L'argument précédent, combiné au Lemme 5.8, montre que

$$E_\alpha = j_{G(e,1,\mathbf{n})}^{G(e,1,n)} \left(\boxtimes_{i=0}^{e-1} j_{G(e,1,\alpha_i^*)}^{G(e,1,n_i)} (\epsilon \otimes \gamma_e^i) \right).$$

Au vu de la Proposition 5.5 et de l'additivité de la fonction b^c (voir les commentaires qui suivent le Lemme 4.1), il suffit d'établir la formule pour $b(\alpha)$ dans le cas où $E_\alpha = \epsilon \otimes \gamma_e^k$. Dans ce cas, toutes les partitions α_i sont nulles si $i \neq k$, tandis que

$$\alpha_k = (0 \leq \underbrace{1 \leq \cdots \leq 1}_{n \text{ parties}}).$$

Posons $\Lambda = r(\Lambda_{\mathbf{d}}^{r,0}(\boldsymbol{\alpha}))$ (où r est un entier positif quelconque). Supposons, en plus, que chaque ligne de Λ contienne n coefficients (numérotés de 0 à $n-1$). Si l'on pose

$$k' = \begin{cases} k+1 & \text{si } 0 \leq k < e-1, \\ 0 & \text{si } k = e-1, \end{cases}$$

alors on a que

$$b^c(\Lambda)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k', \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad c(\Lambda)_{ij} = \begin{cases} e(n-j-1) + (i-1) & \text{si } i > 0, \\ e(n-j-1) + (e-1) & \text{si } i = 0. \end{cases}$$

En particulier, on voit que

$$c(\Lambda)_{k'j} = e(n-j-1) + k.$$

La formule (10) donne donc que

$$\begin{aligned} b^c(\Lambda) &= \sum_{(i,j)} c(\Lambda)_{ij} b^c(\Lambda)_{ij} = \sum_{j=0}^{n-1} c(\Lambda)_{k'j} = \sum_{j=0}^{n-1} (e(n-j-1) + k) \\ &= e \left(n^2 - \sum_{j=0}^{n-1} j - n \right) + kn = en^2 - e \frac{n(n-1)}{2} - en + kn \\ &= kn + e(n^2 - n)/2. \end{aligned}$$

Il découle du Corollaire 5.7 que $b^c(\Lambda) = b(\epsilon \otimes \gamma_e^k)$. \square

Remarque 5.10. La preuve de la proposition ci-dessus montre que toute représentation irréductible de $G(e, 1, n)$ est de la forme

$$j_{G(e,1,\boldsymbol{\alpha}_0^*) \times \dots \times G(e,1,\boldsymbol{\alpha}_{e-1}^*)}^{G(e,1,n)} ((\epsilon \otimes \gamma_e^0) \otimes \dots \otimes (\epsilon \otimes \gamma_e^{e-1})),$$

où, pour chaque $i \in \{0, 1, \dots, e-1\}$, on a noté $\boldsymbol{\alpha}_i^* = (0 \leq \alpha_i^{*(0)} \leq \dots \leq \alpha_i^{*(m)})$ la partition duale de la partition $\boldsymbol{\alpha}_i$ et où $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_0, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{e-1}) \in \mathcal{P}(e, 1, n)$. Ceci constitue une généralisation au groupe $G(e, 1, n)$ du résultat connu pour les groupes de Weyl de type B_n (voir [3, Proposition 11.4.2] ou [6]).

Proposition 5.11. *Si $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(e, e, n)$ et $\Lambda_{\mathbf{d}}^{r,0}(\boldsymbol{\alpha})$ est distingué, alors toutes les représentations $E_{\boldsymbol{\alpha},l}$ ($1 \leq l \leq s_e(\boldsymbol{\alpha})$) sont j -inductibles.*

Démonstration. Soit $\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{P}(e, e, n)$ une multipartition telle que les représentations $E_{\boldsymbol{\alpha},l}$ ($1 \leq l \leq s_e(\boldsymbol{\alpha})$) soient spéciales. (Il est clair que la propriété d'être spécial ne dépend pas de l , puisque les fonctions a et b ne dépendent que de $\boldsymbol{\alpha}$).

Si $\boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}(e, 1, n)$, on sait que chaque $E_{\boldsymbol{\alpha},l}$ intervient dans la restriction de $E_{\boldsymbol{\beta}}$ à $G(e, e, n)$ si et seulement si $\boldsymbol{\beta}$ est une multipartition au-dessus de $\boldsymbol{\alpha}$ (et dans ce cas, $E_{\boldsymbol{\alpha},l}$ intervient dans $E_{\boldsymbol{\beta}}$ avec multiplicité 1). En particulier, il s'ensuit que

$$b(\boldsymbol{\alpha}) = \min\{b(\boldsymbol{\beta}) \mid \boldsymbol{\beta} \in \mathcal{P}(e, 1, n) \text{ est au-dessus de } \boldsymbol{\alpha}\}.$$

Soit $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathcal{P}(e, 1, n)$ une multipartition au-dessus de $\boldsymbol{\alpha}$ telle que $b(\boldsymbol{\alpha}) = b(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})$. On voit que $E_{\boldsymbol{\alpha},l}$ est j -inductible si et seulement si $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ est l'unique multipartition au-dessus de $\boldsymbol{\alpha}$ en laquelle la valeur de la fonction b égale $b(\boldsymbol{\alpha})$.

Il est clair que les autres multipartitions au-dessus de $\boldsymbol{\alpha}$ s'obtiennent à partir de $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$ par rotation. Donc nous voudrions démontrer que

$$b(r^k(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})) > b(\boldsymbol{\alpha}) \quad \text{si } r^k(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) \neq \tilde{\boldsymbol{\alpha}}.$$

Posons $\Lambda = \Lambda_{\mathbf{d}}^{r,0}(\alpha)$ et $\tilde{\Lambda} = \Lambda_{\mathbf{d}}^{r,0}(\tilde{\alpha})$. Il est clair que

$$a^c(\Lambda) = a^c(\tilde{\Lambda}) = a^c(r(\tilde{\Lambda})).$$

D'une part, puisque Λ est distingué, on sait que $b(\alpha) = a(\alpha) = a^c(\Lambda)$. D'autre part, la Proposition 5.9 dit que $b(\tilde{\alpha}) = b^c(r(\tilde{\Lambda}))$. On conclut que $a^c(r(\tilde{\Lambda})) = b^c(r(\tilde{\Lambda}))$, et donc, selon le Lemme 4.1, que $r(\tilde{\Lambda})$ est distingué.

S'il y avait une multipartition $r^k(\tilde{\alpha})$, différente de $\tilde{\alpha}$, telle que $b(r^k(\tilde{\alpha})) = b(\alpha)$, alors on saurait que $b^c(r^{k+1}(\tilde{\Lambda})) = b(\alpha)$ aussi. Pourtant, on sait que $a^c(r^{k+1}(\tilde{\Lambda})) = a^c(r(\tilde{\Lambda}))$, et donc on voit que $r^{k+1}(\tilde{\Lambda})$ devrait être distingué. De plus, puisque $\tilde{\alpha} \neq r^k(\tilde{\alpha})$, on sait que $r(\tilde{\Lambda}) \neq r^{k+1}(\tilde{\Lambda})$. Mais il est évident qu'une r -orbite de symboles de poids \mathbf{d} possède au plus un membre distingué.

Ainsi, $\tilde{\alpha}$ est bien l'unique multipartition au-dessus de α telle que $b(\tilde{\alpha}) = b(\alpha)$, et donc $E_{\alpha,l}$ est j -inductible. \square

Au cours de la preuve de la proposition précédente, nous avons établi le fait suivant : si $\alpha \in \mathcal{P}(e, e, n)$ est une multipartition telle que $\Lambda_{\mathbf{b}}^{r,0}(\alpha)$ est distingué, et si l'on définit $\tilde{\alpha} \in \mathcal{P}(e, 1, n)$ par l'équation $E_{\tilde{\alpha}} = j_{G(e,e,n)}^{G(e,1,n)} E_{\alpha,l}$, alors $r(\Lambda_{\mathbf{d}}^{r,0}(\tilde{\alpha}))$ est distingué. Les Propositions 4.3 et 4.4 impliquent alors que $a^c(\Lambda_{\mathbf{b}}^{r,r}(\tilde{\alpha})) = b^c(\Lambda_{\mathbf{b}}^{r,r}(\tilde{\alpha}))$, et donc que $\Lambda_{\mathbf{b}}^{r,r}(\tilde{\alpha})$ est également distingué. Cette observation fait partie du corollaire suivant.

Corollaire 5.12. *Soient $\alpha \in \mathcal{P}(e, e, n)$ et $\tilde{\alpha} \in \mathcal{P}(e, 1, n)$. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\Lambda_{\mathbf{d}}^{r,0}(\alpha)$ est distingué, et $E_{\tilde{\alpha}} \simeq j_{G(e,e,n)}^{G(e,1,n)} E_{\alpha,l}$ pour tout l , $1 \leq l \leq s_e(\alpha)$.
- (2) $\Lambda_{\mathbf{b}}^{r,r}(\tilde{\alpha})$ est distingué, et $\tilde{\alpha}$ est au-dessus de α .
- (3) $r(\Lambda_{\mathbf{d}}^{r,0}(\tilde{\alpha}))$ est distingué, et $\tilde{\alpha}$ est au-dessus de α .

Démonstration. Il reste à montrer que les conditions (2) et (3) sont équivalentes et qu'elles impliquent la condition (1). Soit $\tilde{\alpha} \in \mathcal{P}(e, 1, n)$, et soit α son image dans $\mathcal{P}(e, e, n)$. Il découle des Propositions 4.3 et 4.4 que $\Lambda_{\mathbf{b}}^{r,r}(\tilde{\alpha})$ est distingué si et seulement si $r(\Lambda_{\mathbf{d}}^{r,0}(\tilde{\alpha}))$ l'est. Supposons que ces deux conditions soient satisfaites. On sait, par définition, que $\Lambda_{\mathbf{d}}^{r,0}(\alpha)$ est distingué (car $r(\Lambda_{\mathbf{d}}^{r,0}(\tilde{\alpha}))$ l'est). Par suite, la proposition précédente nous dit que tous les $E_{\alpha,l}$ sont j -inductible. En effet, leur induite tronquée (commune) doit être $E_{\tilde{\alpha}}$: si l'on définit $\tilde{\alpha}'$ par $E_{\tilde{\alpha}'} = j_{G(e,e,n)}^{G(e,1,n)} E_{\alpha,l}$, alors on sait que $\tilde{\alpha}'$ est au-dessus de α et donc est une rotation de $\tilde{\alpha}$; mais on sait aussi que $r(\Lambda_{\mathbf{d}}^{r,0}(\tilde{\alpha}'))$ est distingué. Ce dernier étant une rotation du symbole distingué $r(\Lambda_{\mathbf{d}}^{r,0}(\tilde{\alpha}))$, on voit que les deux doivent être égaux, et donc que $\tilde{\alpha}' = \tilde{\alpha}$. \square

6. SYMBOLES SPÉTSIAUX ET INDUCTION TRONQUÉE POUR $G(e, 1, n)$

Les résultats principaux de cette section (les Théorèmes 6.3 et 6.4) fournissent un lien entre les symboles distingués, l'induction tronquée, et les représentations spéciales. Nous aurons besoin de la proposition suivante, utile pour le calcul des induites tronquées.

Proposition 6.1. *Soient $\beta' \in \mathcal{P}(e, 1, n')$ et $\beta'' \in \mathcal{P}(e, 1, n'')$, et posons $\alpha = \beta' + \beta'' \in \mathcal{P}(e, 1, n' + n'')$. Alors*

$$j_{G(e,1,n') \times G(e,1,n'')}^{G(e,1,n'+n'')} (E_{\beta'} \boxtimes E_{\beta''}) = E_{\alpha}.$$

Démonstration. Si $\beta' = (\beta'_0, \dots, \beta'_{e-1})$ et $\beta'' = (\beta''_0, \dots, \beta''_{e-1})$, soit n'_i (resp. n''_i) la somme de la partition β'_i (resp. β''_i), où $0 \leq i < e$. Posons aussi $\mathbf{n}' = (n'_0, \dots, n'_{e-1})$ et $\mathbf{n}'' = (n''_0, \dots, n''_{e-1})$. Comme on a remarqué au cours de la preuve de la Proposition 5.9, on a que

$$E_{\beta'} = j_{G(e,1,\mathbf{n}')}^{G(e,1,n')} (E_{\beta'_0} \boxtimes (E_{\beta'_1} \otimes \gamma_e) \boxtimes \cdots \boxtimes (E_{\beta'_{e-1}} \otimes \gamma_e^{e-1})),$$

et de même pour $E_{\beta''}$.

Posons $n = n' + n''$, $n_i = n'_i + n''_i$, et $\mathbf{n} = \mathbf{n}' + \mathbf{n}''$. En utilisant les définitions de $E_{\beta'}$ et de $E_{\beta''}$ et la transitivité de l'induction tronquée, on trouve que

$$\begin{aligned} & j_{G(e,1,\mathbf{n}')}^{G(e,1,n)} (E_{\beta'} \boxtimes E_{\beta''}) \\ &= j_{G(e,1,\mathbf{n}')}^{G(e,1,n)} j_{G(e,1,\mathbf{n}'') \times G(e,1,\mathbf{n}')}^{G(e,1,n') \times G(e,1,\mathbf{n}'')} \boxtimes_{i=0}^{e-1} (E_{\beta'_i} \otimes \gamma_e^i) \boxtimes \boxtimes_{i=0}^{e-1} (E_{\beta''_i} \otimes \gamma_e^i) \\ (15) \quad &= j_{G(e,1,\mathbf{n})}^{G(e,1,n)} \boxtimes_{i=0}^{e-1} j_{G(e,1,\mathbf{n}'_i) \times G(e,1,\mathbf{n}''_i)}^{G(e,1,n_i)} (E_{\beta'_i} \otimes \gamma_e^i) \boxtimes (E_{\beta''_i} \otimes \gamma_e^i). \end{aligned}$$

Étudions maintenant les facteurs du grand produit tensoriel ci-dessus : selon le Lemme 5.8, pour chaque i , on a

$$j_{G(e,1,\mathbf{n}'_i) \times G(e,1,\mathbf{n}''_i)}^{G(e,1,n_i)} (E_{\beta'_i} \otimes \gamma_e^i) \boxtimes (E_{\beta''_i} \otimes \gamma_e^i) = j_{G(e,1,(\beta'_i)^*) \times G(e,1,(\beta''_i)^*)}^{G(e,1,n_i)} (\epsilon \otimes \gamma_e^i) \boxtimes (\epsilon \otimes \gamma_e^i)$$

Maintenant, on remarque que la réunion des parties de $(\beta'_i)^*$ et de $(\beta''_i)^*$ n'est autre que l'ensemble de parties de $(\beta'_i + \beta''_i)^*$. En particulier, on a que

$$G(e,1,(\beta'_i)^*) \times G(e,1,(\beta''_i)^*) \simeq G(e,1,(\beta_i)^*).$$

Il est clair que, sous cet isomorphisme, la représentation $(\epsilon \otimes \gamma_e^i) \boxtimes (\epsilon \otimes \gamma_e^i)$ s'identifie avec la représentation $\epsilon \otimes \gamma_e^i$ de $G(e,1,(\beta_i)^*)$.

La formule (15) devient donc :

$$\begin{aligned} j_{G(e,1,\mathbf{n}')}^{G(e,1,n)} (E_{\beta'} \boxtimes E_{\beta''}) &= j_{G(e,1,\mathbf{n})}^{G(e,1,n)} \boxtimes_{i=0}^{e-1} j_{G(e,1,(\beta_i)^*)}^{G(e,1,n_i)} (\epsilon \otimes \gamma_e^i) \\ &= j_{G(e,1,\mathbf{n})}^{G(e,1,n)} \boxtimes_{i=0}^{e-1} (E_{\beta_i} \otimes \gamma_e^i) = E_{\beta}. \end{aligned}$$

□

Ensuite, la proposition suivante, qui permet de décomposer un symbole en somme de deux symboles plus petits, sera indispensable.

Proposition 6.2. *Soit $\alpha \in \mathcal{P}(e,1,n)$, et posons $\Lambda = \Lambda_{\mathbf{b}}^{r,s}(\alpha)$. Λ est distingué si et seulement si, pour tous les entiers positifs r', r'', s', s'' tels que*

$$(16) \quad \begin{array}{l} 0 \leq s' \leq r' \\ 0 \leq s'' \leq r'' \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} r' + r'' = r \\ s' + s'' = s, \end{array}$$

il existe des entiers n', n'' tels que $n' + n'' = n$, et des multipartitions $\beta' \in \mathcal{P}(e,1,n')$ et $\beta'' \in \mathcal{P}(e,1,n'')$ telles que

$$\alpha = \beta' + \beta'' \quad \text{et} \quad \Lambda_{\mathbf{b}}^{r',s'}(\beta') \text{ et } \Lambda_{\mathbf{b}}^{r'',s''}(\beta'') \text{ sont distingués.}$$

Démonstration. Supposons d'abord qu'on a des entiers n' et n'' et des multipartitions $\beta' \in \mathcal{P}(e, 1, n')$ et $\beta'' \in \mathcal{P}(e, 1, n'')$ avec les propriétés décrites ci-dessus. Posons $\Lambda' = \Lambda_{\mathbf{b}}^{r', s'}(\beta')$ et $\Lambda'' = \Lambda_{\mathbf{b}}^{r'', s''}(\beta'')$. Choisissons des présymboles représentants pour Λ , Λ' , et Λ'' de manière que tous les trois aient la 0-ème ligne à $m + 1$ coefficients, et toutes les autres lignes à m coefficients. Posons aussi $\Phi = \Phi^{r, s}(\mathbf{b})$, $\Phi' = \Phi^{r', s'}(\mathbf{m})$, et $\Phi'' = \Phi^{r'', s''}(\mathbf{m})$. D'après la définition des protosymboles, il est évident que $\Phi_i^{(j)} = \Phi_i'^{(j)} + \Phi_i''^{(j)}$. Puisque $\alpha_i^{(j)} = \beta_i'^{(j)} + \beta_i''^{(j)}$, on voit que

$$\Lambda_i^{(j)} = \Lambda_i'^{(j)} + \Lambda_i''^{(j)}.$$

Il en découle que $a^c(\Lambda)_{ij, kl} = a^c(\Lambda')_{ij, kl} + a^c(\Lambda'')_{ij, kl}$, et donc que

$$a^c(\Lambda) = a^c(\Lambda') + a^c(\Lambda'').$$

D'autre part, on sait, d'après la proposition précédente, que

$$E_{\alpha} = j_{G(e, 1, n') \times G(e, 1, n'')}^{G(e, 1, n)} E_{\beta'} \boxtimes E_{\beta''},$$

et donc que $b(\alpha) = b(E_{\beta'} \boxtimes E_{\beta''}) = b(\beta') + b(\beta'')$. Selon la Proposition 5.9, on peut conclure que

$$b^c(\Lambda) = b^c(\Lambda') + b^c(\Lambda'').$$

Puisque Λ' et Λ'' sont distingués, on voit que $a^c(\Lambda) = b^c(\Lambda)$ (voir le Lemme 4.1), et donc on déduit que Λ est distingué aussi.

D'autre part, supposons maintenant que Λ est distingué. Nous voulons trouver n' , n'' , β' , et β'' avec les propriétés énoncées dans la proposition. En fait, nous allons d'abord décrire leurs symboles $\Lambda' = \Lambda_{\mathbf{b}}^{r', s'}(\beta')$ et $\Lambda'' = \Lambda_{\mathbf{b}}^{r'', s''}(\beta'')$, et puis nous montrerons que ces symboles-là proviennent en effet des multipartitions telles que cherchées.

Les deux fonctions suivantes nous seront utiles :

$$\begin{aligned} \kappa' : \{0, \dots, r-1\} &\rightarrow \{0 \dots r'\} & \kappa'' : \{0, \dots, r-1\} &\rightarrow \{0, \dots, r''-1\} \\ \kappa'(i) &= \begin{cases} i & \text{si } 0 \leq i \leq s', \\ s' & \text{si } s' \leq i \leq s, \\ i - s'' & \text{si } s \leq i \leq s'' + r', \\ r' & \text{si } s'' + r' \leq i \leq r-1 \end{cases} & \kappa''(i) &= \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq i \leq s', \\ i - s' & \text{si } s' \leq i \leq s, \\ s'' & \text{si } s \leq i \leq s'' + r', \\ i - r' & \text{si } s'' + r' \leq i \leq r-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Il est clair que les fonctions κ' et κ'' sont toutes deux croissantes, et que

$$\kappa'(i) + \kappa''(i) = i$$

pour tout i .

Pour chaque position (i, j) , le coefficient $\Lambda_i^{(j)}$ s'écrit

$$\Lambda_i^{(j)} = ar + b \quad \text{où } 0 \leq b \leq r-1$$

de manière unique. Définissons Λ' et Λ'' en posant

$$(\Lambda')_i^{(j)} = ar' + \kappa'(b) \quad \text{et} \quad (\Lambda'')_i^{(j)} = ar'' + \kappa''(b)$$

et puis posons $\beta' = \Lambda' - \Phi^{r', s'}(\mathbf{b})$ et $\beta'' = \Lambda'' - \Phi^{r'', s''}(\mathbf{b})$. Il faut vérifier que β' et β'' sont bien des multipartitions, et que Λ' et Λ'' sont distingués.

Pour démontrer que β' est une multipartition, il suffit de montrer que, pour tout i , $\beta_i'^{(j-1)} \leq \beta_i'^{(j)}$ si $j > 0$, et que $\beta_i'^{(0)} \geq 0$. Ces inégalités équivalent aux suivantes :

$$(\Lambda')_i^{(j-1)} \leq (\Lambda')_i^{(j)} - r' \quad \text{et} \quad (\Lambda')_0^{(0)} \geq 0, \quad (\Lambda')_i^{(0)} \geq s' \text{ si } i > 0.$$

Il est évident que $(\Lambda')_0^{(0)} \geq 0$, et il est très facile d'établir les autres inégalités à partir des faits correspondants pour Λ :

$$\Lambda_i^{(j-1)} \leq \Lambda_i^{(j)} \quad \text{et} \quad \Lambda_0^{(0)} \geq 0, \quad \Lambda_i^{(0)} \geq s \text{ si } i > 0.$$

Si l'on écrit $\Lambda_i^{(j-1)} = a_1 r + b_1$ et $\Lambda_i^{(j)} = a_2 r + b_2$, alors il faut que $a_2 \geq a_1 + 1$, et, dans le cas où $a_2 = a_1 + 1$, on sait que $b_2 \geq b_1$. Dans le cas où $a_2 > a_1 + 1$, il est clair que $(\Lambda')_i^{(j-1)} \leq (\Lambda')_i^{(j)} - r'$; par contre, si $a_2 = a_1 + 1$, l'inégalité cherchée est conséquence du fait que $\kappa'(b_2) \geq \kappa'(b_1)$. Ensuite, écrivons $\Lambda_i^{(0)} = ar + b$. Si $a > 0$, on voit que $(\Lambda')_i^{(0)} = ar' + \kappa'(b) \geq r' \geq s'$; par contre, si $a = 0$, alors on sait que $b \geq s$, et donc que $\kappa'(b) \geq s'$. Donc β' est bien une multipartition.

Démontrons maintenant que Λ' est distingué. Soient (i, j) et (k, l) deux positions telles que $(i, j) \prec (k, l)$. Écrivons

$$\Lambda_i^{(j)} = a_1 r + b_1 \quad \text{et} \quad \Lambda_k^{(l)} = a_2 r + b_2.$$

On sait que $a_1 r + b_1 \leq a_2 r + b_2$, ce qui implique que soit $a_1 < a_2$, soit $a_1 = a_2$ et $b_1 \leq b_2$. Dans tous les deux cas, on voit que $a_1 r' + \kappa'(b_1) \leq a_2 r' + \kappa'(b_2)$. Autrement dit, $(\Lambda')_i^{(j)} \leq (\Lambda')_k^{(l)}$, et Λ' est distingué.

Les preuves des faits que β'' est une multipartition et que Λ'' est distingué sont analogues. \square

Nous pouvons maintenant établir les théorèmes suivants :

Théorème 6.3. *Soit $W = G(e, 1, n)$, et soient r et s deux entiers tels que $0 \leq s \leq r$. Posons*

$$\mathcal{S} = \{E = j_{W'}^W(E') \in \text{Irr}(W) \mid E' \text{ est une représentation spéciale de } W'\}$$

où W' parcourt les sous-groupes de W de la forme

$$\underbrace{G(e, e, n_1) \times \cdots \times G(e, e, n_s)}_{s \text{ facteurs}} \times \underbrace{G(e, 1, n_{s+1}) \times \cdots \times G(e, 1, n_r)}_{r-s \text{ facteurs}}$$

avec $n_1 + \cdots + n_r = n$. Alors

$$\mathcal{S} = \{E_\alpha \mid \Lambda_{\mathbf{b}}^{r,s}(\alpha) \text{ est distingué}\}.$$

Démonstration. Selon le Corollaire 5.12, pour toute multipartition $\alpha \in \mathcal{P}(e, 1, n)$, $\Lambda_{\mathbf{b}}^{1,1}(\alpha)$ est distingué si et seulement si E_α est l'induite tronquée d'une représentation spéciale de $G(e, e, n)$. D'autre part, on sait que E_α lui-même est spécial si et seulement si $\Lambda_{\mathbf{b}}^{1,0}(\alpha)$ est distingué. Donc \mathcal{S} s'écrit

$$\mathcal{S} = \{j_{W'}^W(E_{\alpha_1} \boxtimes \cdots \boxtimes E_{\alpha_r})\},$$

où W' parcourt les sous-groupes de la forme

$$G(e, 1, n_1) \times \cdots \times G(e, 1, n_r), \quad \text{avec } n_1 + \cdots + n_r = n,$$

et les multipartitions $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont telles que les symboles

$$\Lambda_{\mathbf{b}}^{1,1}(\alpha_1), \dots, \Lambda_{\mathbf{b}}^{1,1}(\alpha_s); \Lambda_{\mathbf{b}}^{1,0}(\alpha_{s+1}), \dots, \Lambda_{\mathbf{b}}^{1,0}(\alpha_r)$$

sont tous distingués. Il s'ensuit de la Proposition 6.1 que \mathcal{S} peut également s'écrire

$$\mathcal{S} = \left\{ E_\alpha \left| \begin{array}{l} \alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r, \text{ où } \Lambda_{\mathbf{b}}^{1,1}(\alpha_1), \dots, \Lambda_{\mathbf{b}}^{1,1}(\alpha_s), \\ \text{et } \Lambda_{\mathbf{b}}^{1,0}(\alpha_{s+1}), \dots, \Lambda_{\mathbf{b}}^{1,0}(\alpha_r) \text{ sont distingués} \end{array} \right. \right\}.$$

Enfin, un argument par récurrence utilisant la Proposition 6.2 montre que $E_\alpha \in \mathcal{S}$ si et seulement si $\Lambda_{\mathbf{b}}^{r,s}(\alpha)$ est distingué. \square

Théorème 6.4. *Soit $W = G(e, e, n)$, et soit r un entier positif. Posons*

$$\mathcal{S} = \{E = j_{W'}^W(E') \in \text{Irr}(W) \mid E' \text{ est une représentation spéciale de } W'\}$$

où W' parcourt les sous-groupes de W de la forme

$$G(e, e, n_1) \times \cdots \times G(e, e, n_r)$$

avec $n_1 + \cdots + n_r = n$. Alors

$$\mathcal{S} = \{E_{\alpha,l} \mid \Lambda_{\mathbf{d}}^{r,0}(\alpha) \text{ est distingué}\}.$$

Démonstration. Posons $\tilde{\mathcal{S}} = \{j_{G(e,e,n)}^{G(e,1,n)} E_{\alpha,l} \mid E_{\alpha,l} \in \mathcal{S}\}$. Selon le Théorème 6.3, $E_{\tilde{\alpha}} \in \tilde{\mathcal{S}}$ si et seulement si $\Lambda_{\mathbf{b}}^{r,r}(\tilde{\alpha})$ est distingué. Ensuite, le Corollaire 5.12 nous dit que $\Lambda_{\mathbf{b}}^{r,r}(\tilde{\alpha})$ est distingué si et seulement si $E_{\tilde{\alpha}}$ est l'induite tronquée d'un $E_{\alpha,l} \in \text{Irr}(G(e, e, n))$ avec $\Lambda_{\mathbf{d}}^{1,0}(\alpha)$ distingué. \square

7. SOUS-GROUPES PARABOLIQUES

Le but de cette section est d'établir le résultat suivant :

Proposition 7.1. *Soit W un groupe de réflexions complexes spécial imprimitif, et soit $W' \subset W$ un sous-groupe parabolique. Si $E \in \text{Irr}(W')$ est spéciale, alors $j_{W'}^W E$ l'est aussi.*

Nous faisons d'abord le calcul de certaines induites tronquées en termes de symboles.

Proposition 7.2. *Soit $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{e-1}) \in \mathcal{P}(e, 1, n)$, où*

$$\alpha_i = (\alpha_i^{(0)} \leq \cdots \leq \alpha_i^{m_i}).$$

Soit f un entier strictement positif. L'induite tronquée $j_{G(e,1,n)}^{G(ef,1,n)} E_\alpha$ est isomorphe à E_β , où $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_{ef-1})$ est donné par

$$\beta_{ke+i} = (0 \leq \cdots \leq \alpha_i^{(m_i-k-2f)} \leq \alpha_i^{(m_i-k-f)} \leq \alpha_i^{(m_i-k)}).$$

Exemple 7.3. Il est plus facile de comprendre la proposition précédente en termes des symboles de type $(0, 0)$ et l'ordre \prec : pour déterminer $\beta_i^{(j)}$, on cherche l'unique position (k, l) dans α telle que $c_{ij}(\Lambda_{\mathbf{b}}^{0,0}(\beta)) = c_{kl}(\Lambda_{\mathbf{b}}^{0,0}(\alpha))$, et on pose $\beta_i^{(j)} = \alpha_k^{(l)}$. Par exemple, si

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

alors $j_{G(3,1,27)}^{G(6,1,27)} E_\alpha \simeq E_\beta$, où

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 6 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pour prouver la Proposition 7.2, nous aurons besoin du lemme suivant, qui traite un cas particulier.

Lemme 7.4. *Supposons que $f \geq n$. La représentation $j_{G(e,1,n)}^{G(ef,1,n)}(\epsilon \otimes \gamma_e^k)$ est isomorphe à E_β , où*

$$\beta_j = \begin{cases} (1) & \text{si } j \equiv k \pmod{e} \text{ et } j < ne, \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est à noter que ce lemme est bien en accord avec la proposition ci-dessus : la multipartition de la représentation $\epsilon \otimes \gamma_e^k$ est $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{e-1})$, où

$$\alpha_j = \begin{cases} (1 \leq \dots \leq 1) & \text{si } j = k, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Posons

$$P = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (e_i^e - e_j^e), \quad Q = \prod_{i=2}^n e_i^{(i-1)e}, \quad R = (e_1 \cdots e_n)^k.$$

Comme on l'a démontré au cours de la preuve du Lemme 5.8, $G(e, 1, n)$ agit sur $\mathbb{C} \cdot PR$ par la représentation $\epsilon \otimes \gamma_e^k$ de $G(e, 1, n)$, et le degré de PR est juste pour le calcul de son induite tronquée.

D'autre part, E_β s'obtient par induction tronquée comme suit :

$$\begin{aligned} E_\beta &= j_{G(ef,1,1) \times \cdots \times G(ef,1,1)}^{G(ef,1,n)} \left(\bigotimes_{h=1}^n (\epsilon \otimes \gamma_{ef}^{k+he}) \right) \\ &= j_{G(ef,1,1) \times \cdots \times G(ef,1,1)}^{G(ef,1,n)} \left(\bigotimes_{h=0}^{n-1} \gamma_{ef}^{k+he} \right). \end{aligned}$$

(On peut supprimer les ϵ figurant dans le produit tensoriel car ils désignent la représentation signe du groupe trivial \mathfrak{S}_1). On renvoie le lecteur au Lemme 5.8 encore une fois pour vérifier que la représentation $\bigotimes_{h=0}^{n-1} \gamma_{ef}^{k+he}$ est réalisée par le polynôme

$$e_1^k e_2^{k+e} \cdots e_n^{k+(n-1)e} = e_2^e e_3^{2e} \cdots e_n^{(n-1)e} \cdot (e_1 \cdots e_n)^k = QR.$$

Pour démontrer que $j_{G(e,1,n)}^{G(ef,1,n)} \simeq E_\beta$, il suffit de démontrer que le polynôme PR appartient au $G(ef, 1, n)$ -module engendré par QR . P est le produit de $n(n-1)/2$ facteurs, et chaque terme e_i^e figure dans $n-1$ d'entre eux. Il est donc clair que PR est de la forme

$$PR = R \sum_{\substack{0 \leq h_1, \dots, h_n \leq n-1 \\ h_1 + \cdots + h_n = n(n-1)/2}} C_{h_1, \dots, h_n} e_1^{h_1 e} e_2^{h_2 e} \cdots e_n^{h_n e},$$

où les $C_{h_1, \dots, h_n} \in \mathbb{Z}$. Soit $w \in \mathfrak{S}_n \subset G(e, 1, n)$ la permutation qui échange i et j et fixe tous les autres entiers. Alors l'action de w sur PR fixe les termes où $h_i = h_j$ et permute les autres termes. Mais on sait que $G(e, 1, n)$ agit sur $\mathbb{C} \cdot PR$ par $\epsilon \otimes \gamma_e^k$, et donc $w \cdot PR = -PR$. On en déduit que $C_{h_1, \dots, h_n} = 0$ si $h_i = h_j$.

Autrement dit, pour que C_{h_1, \dots, h_n} soit non nul, il faut que les h_i soient des entiers positifs distincts et inférieurs ou égaux à $n-1$. Évidemment, à permutation près, la seule possibilité est $(h_1, \dots, h_n) = (0, 1, \dots, n-1)$. En particulier, Q est l'un des termes figurant dans la somme ci-dessus, et les autres s'en obtiennent par l'action de $\mathfrak{S}_n \subset G(ef, 1, n)$. PR est donc bien dans le $G(ef, 1, n)$ -module engendré par QR . \square

Le corollaire suivant est maintenant immédiat :

Corollaire 7.5. *Supposons que $f \geq n$, et soit $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{e-1}) \in \mathcal{P}(e, 1, n)$, où $\alpha_i = (0 \leq \alpha_i^{(0)} \leq \dots \leq \alpha_i^{(m_i)})$. La représentation $j_{G(e,1,n)}^{G(e,f,1,n)} E_\alpha$ est isomorphe à E_β , où*

$$\beta_j = \begin{cases} (\alpha_i^{(m_i-k)}) & \text{si } j = i + ke \text{ et } k \leq m_i, \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration de la Proposition 7.2. Posons $g = fn$, et soit $\gamma \in \mathcal{P}(g, 1, n)$ la multipartition telle que $j_{G(e,1,n)}^{G(g,1,n)} E_\alpha = E_\gamma$. Par transitivité de l'induction tronquée, on sait que $j_{G(e,f,1,n)}^{G(g,1,n)} E_\beta \simeq E_\gamma$ aussi.

Le Corollaire 7.5 décrit γ soit en termes de α , soit en termes de β .

Puisque toute représentation irréductible de $G(e, 1, n)$ s'obtient par induction tronquée d'un produit tensoriel externe de représentations de la forme $\epsilon \otimes \gamma_e^k$, on peut déduire du lemme précédent une formule pour γ en fonction de α . \square

La proposition suivante découle immédiatement de la Proposition 7.2.

Proposition 7.6. *Soit β la multipartition définie par $E_\beta = j_{\mathfrak{S}_n}^{G(e,1,n)} \epsilon$. Alors $\Lambda_{\mathbf{b}}^{0,0}(\beta)$ est distingué.*

Démonstration de la Proposition 7.1. Les sous-groupes paraboliques de $G(e, 1, n)$ sont tous de la forme

$$W' = G(e, 1, n_0) \times \mathfrak{S}_{n_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{n_k} \quad \text{où} \quad n_0 + n_1 + \dots + n_k = n.$$

Soit E une représentation spéciale de W' : donc

$$E = E_\alpha \boxtimes F_1 \boxtimes \dots \boxtimes F_k,$$

où $\Lambda_{\mathbf{b}}^{1,0}(\alpha)$ est distingué, et F_i est une représentation quelconque de \mathfrak{S}_i (toutes ses représentations étant spéciales). Rappelons que toute représentation du groupe symétrique est l'induite tronquée de la représentation signe d'un produit de groupes symétriques plus petits. Nous nous intéressons à $j_{W'}^{G(e,1,n)} E$, et donc on peut sans perte de généralité supposer que $F_i = \epsilon$ pour tout i .

Soit β_i la multipartition de la représentation $j_{\mathfrak{S}_{n_i}}^{G(e,1,n_i)} \epsilon$. Selon la Proposition 7.6, $\Lambda_{\mathbf{b}}^{0,0}(\beta_i)$ est distingué pour tout i . Il s'ensuit que la multipartition

$$\alpha + \beta_1 + \dots + \beta_k,$$

qui correspond à $j_{W'}^{G(e,1,n)} E$, a la propriété que son symbole de type $(1, 0)$ est distingué. Autrement dit, la représentation $j_{W'}^{G(e,1,n)} E$ est spéciale.

La preuve pour $G(e, e, n)$ est presque la même ; on utilise le Corollaire 5.12 pour étudier les multipartitions des $j_{\mathfrak{S}_{n_i}}^{G(e,e,n_i)} \epsilon$. (Il est à noter que cette dernière représentation n'est pas forcément bien définie : il peut exister plusieurs exemplaires non conjugués de \mathfrak{S}_{n_i} dans $G(e, e, n_i)$. Néanmoins les diverses représentations ainsi obtenues sont toutes associées à la même multipartition). \square

8. REPRÉSENTATIONS DE SPRINGER

Soit W le groupe de Weyl d'un groupe algébrique réductif. Une représentation irréductible de W est dit *de Springer* si elle correspond, via la correspondance de Springer, au système local trivial sur une classe unipotente. En particulier, l'ensemble de représentations de Springer est en bijection avec l'ensemble de classes unipotentes.

Dans cette section, nous commençons par rappeler une caractérisation bien connue des représentations de Springer (voir le Théorème 8.2) en termes des sous-groupes *pseudoparaboliques*. Ensuite, on voudrait prendre l'énoncé de ce théorème comme définition dans le cadre des groupes de réflexions complexes, mais il faudra légèrement modifier la définition de "pseudoparabolique" pour que les représentations de Springer soient bien définies. Après avoir trouvé la bonne définition, nous donnons la classification des sous-groupes pseudoparaboliques ainsi que celle des représentations de Springer.

Il est bien connu que les diverses conditions figurant dans la définition suivante sont équivalentes.

Définition 8.1. Soit W le groupe de Weyl d'un groupe algébrique réductif G à tore maximal T . Soit G^* le groupe dual de G , et soit T^* le tore maximal dual à T . Un sous-groupe $W' \subset W$ est *pseudoparabolique* (à l'égard de G) s'il vérifie l'une des conditions suivantes équivalentes :

- (1) W' est le centralisateur d'un point de T^* .
- (2) W' est conjugué à un sous-groupe engendré par les réflexions correspondant à un sous-ensemble propre des nœuds du diagramme de Dynkin étendu de G^* .

Dans le cas où G et G^* sont définis sur \mathbb{C} , on peut ajouter une troisième version : soit T_0^* une forme réelle compacte de T^* , et soit \mathfrak{t}_0^* son algèbre de Lie. Soit $L \subset \mathfrak{t}_0^*$ le réseau radiciel associé à G et T . On peut identifier T_0^* avec \mathfrak{t}_0^*/L , et donc W' est pseudoparabolique si

- (3) W' est le centralisateur d'un point de \mathfrak{t}_0^*/L .

La deuxième condition ci-dessus est importante car elle rend évident le fait que tout sous-groupe pseudoparabolique est engendré par des réflexions ; pourtant, dans le cadre des groupes de réflexions complexes, où on ne dispose pas d'une théorie bien développée de diagrammes de Dynkin, c'est la troisième condition qui pourra se généraliser. La caractérisation suivante des représentations de Springer est bien connue (voir par exemple [3, §12.6]).

Théorème 8.2. *Soit W le groupe de Weyl d'un groupe algébrique réductif G . Une représentation de W est de Springer si et seulement si elle est l'induite tronquée d'une représentation spéciale d'un sous-groupe pseudoparabolique.*

Désormais, nous travaillons dans le contexte suivant : K désigne un corps de nombres abélien, V est un espace vectoriel de dimension finie sur K , $W \subset GL(V)$ est un groupe de réflexions et V est muni d'une forme hermitienne qui est W -invariante et non dégénérée. Enfin, soit \mathbb{Z}_K l'anneau des entiers algébriques dans K .

Définition 8.3 (Nebe). Une *racine* pour W est un vecteur propre pour une réflexion dans W à valeur propre non triviale.

Un *réseau radiciel primitif* pour W est un \mathbb{Z}_K -sous-module de V qui est W -invariant et engendré en tant que $\mathbb{Z}_K[W]$ -module par une seule racine.

Nebe a classifié dans [11] tous les réseaux radiciels primitifs des groupes de réflexions complexes. Plus tard, nous rappellerons ses résultats pour les groupes imprimitifs spésiaux, mais d’abord, esquissons ce que nous voudrions faire :

- (1) Définir les sous-groupes pseudoparaboliques de W , à l’égard d’un réseau radiciel L , comme étant les stabilisateurs des points de V/L .
- (2) Définir les représentations de Springer de W à l’égard de L comme étant les induites tronquées des représentations spéciales des sous-groupes pseudoparaboliques.
- (3) Espérer que tous les sous-groupes pseudoparaboliques aient la forme des sous-groupes figurant dans les Théorèmes 6.3 et 6.4, et puis déduire que les symboles distingués paramètrent les représentations de Springer.

Malheureusement, ce projet échoue à la première étape : les stabilisateurs des points de V/L ne sont même pas toujours des groupes de réflexions, et si l’on se restreint aux sous-groupes du stabilisateur engendrés par des réflexions, on peut obtenir des groupes qui sont non spésiaux ou non *pleins* (voir la Définition 8.4).

Nous allons bien associer à chaque point de V/L un sous-groupe de W (ou plutôt, une classe de conjugaison de sous-groupes de W) qui sera dit “pseudoparabolique”, et puis nous effectuerons le reste de l’esquisse comme décrite ci-dessus. Pourtant, le besoin d’éviter tous ces problèmes complique beaucoup la construction.

Si L est un réseau radiciel primitif pour W , soit \tilde{W}_L le groupe engendré par W et toute autre réflexion qui préserve L et pour laquelle il y a une racine dans L . Alors \tilde{W}_L est un groupe de réflexions contenant W (et éventuellement plus grand) pour lequel L est un réseau radiciel primitif.

Soit $x \in V/L$. Soit $(\tilde{W}_L)^x$ le stabilisateur dans \tilde{W}_L de x . Ce groupe-ci n’est pas forcément engendré par des réflexions, et donc on définit $(\tilde{W}_L)_{\text{réf}}^x$ comme étant le groupe engendré par les réflexions dans $(\tilde{W}_L)^x$. Maintenant, il n’est pas forcément le cas que $(\tilde{W}_L)_{\text{réf}}^x$ ait la propriété suivante, laquelle sera essentielle pour les sous-groupes pseudoparaboliques.

Définition 8.4. Un sous-groupe de réflexions $W' \subset W$ est *plein* si toute réflexion $s \in W$ vérifie la propriété suivante : s’il y a un entier a tel que $s^a \in W'$ et $s^a \neq 1$, alors $s \in W'$.

Par un abus de notation, nous définissons $(\tilde{W}_L)_{\text{plein}}^x$ comme étant un sous-groupe parabolique maximal de $(\tilde{W}_L)_{\text{réf}}^x$ qui est plein en tant que sous-groupe de \tilde{W}_L . (C’est un abus car $(\tilde{W}_L)_{\text{plein}}^x$ n’est unique qu’à conjugaison près). Enfin, $(\tilde{W}_L)_{\text{plein}}^x$ n’est pas forcément spésial. On note $(\tilde{W}_L)_{\text{spets}}^x$ le plus grand sous-groupe spésial plein de $(\tilde{W}_L)_{\text{plein}}^x$.

Définition 8.5. Soit W un groupe de réflexions sur V , et soit L un réseau radiciel primitif pour W . Un sous-groupe $W' \subset W$ est un sous-groupe *pseudoparabolique associé* à $x \in V/L$ si $W' = W \cap (\tilde{W}_L)_{\text{spets}}^x$ pour un certain groupe $(\tilde{W}_L)_{\text{spets}}^x$.

Une représentation irréductible de W est dite *de Springer* si elle est l’induite tronquée d’une représentation spéciale d’un sous-groupe pseudoparabolique.

Nous allons déterminer tous les sous-groupes pseudoparaboliques ainsi que les représentations de Springer pour tous les groupes de réflexions complexes imprimitifs. Il faut traiter les groupes diédraux séparément car leurs corps de définition sont de la forme $\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$ (où ζ est une racine de l'unité) plutôt que $\mathbb{Q}(\zeta)$, et par conséquent, la détermination des groupes \tilde{W}_L ainsi que celle des sous-groupes pleins ou spetsiaux est différente.

8.1. Les groupes imprimitifs non diédraux. Soient e un entier positif et ζ une racine e -ème de l'unité primitive, et posons $K = \mathbb{Q}(\zeta)$, $V = \bigoplus_{i=1}^n Ke_i$ (cf. la Section 3.1), $L_1 = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_K e_i$, et

$$L_2 = \{ \sum v_i e_i \in L_1 \mid \sum v_i \in (1 - \zeta)\mathbb{Z}_K \}.$$

(Il est à noter que si e n'est pas une puissance d'un nombre premier, alors $1 - \zeta$ est inversible dans \mathbb{Z}_K , et donc $L_1 = L_2$). On pose aussi $W_n = G(e, 1, n)$ et $W'_n = G(e, e, n)$.

- Théorème 8.6** (Nebe). (1) *Si e n'est pas une puissance d'un nombre premier, alors L_1 est l'unique réseau radiciel primitif de W_n à isomorphisme près.*
(2) *Si e est une puissance d'un nombre premier, alors W_n admet deux classes d'isomorphie de réseaux radiciels primitifs, dont L_1 et L_2 sont des représentants.*
(3) *L_2 est l'unique réseau radiciel primitif de W'_n à isomorphisme près si $n \geq 3$.*

À la suite de ce théorème et la classification des groupes de réflexions complexes, l'énoncé suivant est évident.

Lemme 8.7. *Pour tout groupe de réflexions complexes imprimitif irréductible W défini sur K , et tout réseau radiciel primitif L pour W , on a que $\tilde{W}_L = G(e, 1, n)$.*

Lemme 8.8. *Soit $v = \sum v_i e_i \in V$ un point tel que $v_i \equiv v_j \pmod{\mathbb{Z}_K}$ pour tout i, j . Soit x l'image de v dans V/L , où L est un réseau radiciel primitif. Si $v_i \in \mathbb{Z}_K$ pour tout i , alors*

$$(\tilde{W}_L)_{\text{réf}}^x = (\tilde{W}_L)_{\text{plein}}^x = (\tilde{W}_L)_{\text{spets}}^x = G(e, 1, n).$$

Si non, soit t le plus petit entier strictement positif tel que $(1 - \zeta^t)v_i \in \mathbb{Z}_K$ (et donc $(1 - \zeta^t)v_i \in \mathbb{Z}_K$ pour tout i). On a que

$$\begin{aligned} (\tilde{W}_{L_1})_{\text{réf}}^x &= G(e/t, 1, n), \\ (\tilde{W}_{L_1})_{\text{plein}}^x &= (\tilde{W}_{L_1})_{\text{spets}}^x = \begin{cases} G(e, 1, n) & \text{si } t = 1, \\ G(1, 1, n) & \text{si } t > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Si e est une puissance d'un nombre premier p , alors on a aussi

$$\begin{aligned} (\tilde{W}_{L_2})_{\text{réf}}^x &= \begin{cases} G(e/t, p, n) & \text{si } t < e, \\ G(1, 1, n) & \text{si } t = e, \end{cases} \\ (\tilde{W}_{L_2})_{\text{plein}}^x &= \begin{cases} G(e, p, n) \\ G(1, 1, n) \end{cases} \quad \text{et} \quad (\tilde{W}_{L_2})_{\text{spets}}^x = \begin{cases} G(e, e, n) & \text{si } t = 1, \\ G(1, 1, n) & \text{si } t > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Démonstration. Le cas où les v_i sont dans \mathbb{Z}_K est évident. Nous supposons désormais que les $v_i \notin \mathbb{Z}_K$. Remarquons qu'une fois qu'on connaît les $(\tilde{W}_L)_{\text{réf}}^x$, les $(\tilde{W}_L)_{\text{plein}}^x$ et les $(\tilde{W}_L)_{\text{spets}}^x$ s'en déduisent très facilement. Il suffit de déterminer

les $(\tilde{W}_L)_{\text{réf}}^x$. Remarquons aussi que t divise e . En particulier, si e est une puissance d'un nombre premier, alors t l'est aussi.

Soit $s \in \mathfrak{S}_n \subset G(e, 1, n)$ la transposition qui échange e_1 et e_2 . Puisqu'on a supposé que $v_i \equiv v_j \pmod{\mathbb{Z}_K}$, on voit que

$$v - s \cdot v = (v_1 - v_2)e_1 + (v_2 - v_1)e_2 \in L_2 \subset L_1.$$

On peut faire un calcul analogue pour toute transposition, et donc on sait que \mathfrak{S}_n stabilise x . Ensuite, soit $r \in G(e, 1, n)$ la réflexion qui envoie e_1 sur ζe_1 et fixe les autres e_i . Alors

$$\begin{aligned} v - (r^{-t}sr^t)v &= (v_1 - \zeta^{-t}v_2)e_1 + (v_2 - \zeta^t v_1)e_2 \\ &= ((v_1 - v_2) - \zeta^{-t}(1 - \zeta^t)v_2)e_1 + ((v_2 - v_1) + (1 - \zeta^t)v_1)e_2 \in L_1. \end{aligned}$$

Soit $n = v_2 - v_1 \in \mathbb{Z}_K$. Alors la somme des coefficients de cette expression égale

$$-\zeta^{-t}(1 - \zeta^t)v_2 + (1 - \zeta^t)(v_2 - n) = -\zeta^{-t}(1 - \zeta^t)(1 - \zeta^t)v_2 + (1 - \zeta^t)n \in (1 - \zeta^t)\mathbb{Z}_K.$$

On voit que $v - (r^{-t}sr^t)v \in L_2$. En combinaison avec \mathfrak{S}_n , l'élément $r^{-t}sr^t$ engendre le groupe $G(e/t, e/t, n)$. Donc $G(e/t, e/t, n) \subset (\tilde{W}_L)_{\text{réf}}^x$ et pour $L = L_1$, et pour $L = L_2$.

Supposons maintenant que $L = L_1$, et soit k un facteur de e . Il est clair que

$$v - r^k v = (1 - \zeta^k)v_1 e_1 \quad \begin{cases} \in L_1 & \text{si } k = t, \\ \notin L_1 & \text{si } 1 \leq k < t. \end{cases}$$

Donc $r^t \in (\tilde{W}_{L_1})_{\text{réf}}^x$, mais $r^k \notin (\tilde{W}_{L_1})_{\text{réf}}^x$ si $1 \leq k < t$. On voit que $G(e/t, 1, n) \subset (\tilde{W}_{L_1})_{\text{réf}}^x$; de surcroît, puisqu'on a déjà considéré toutes les réflexions dans \tilde{W}_{L_1} (à conjugaison près), on conclut que $(\tilde{W}_{L_1})_{\text{réf}}^x = G(e/t, 1, n)$.

Supposons maintenant que e est une puissance d'un nombre premier. Si $t = e$, alors aucune puissance non triviale de r ne fixe x , et $(\tilde{W}_{L_2})_{\text{réf}}^x = G(1, 1, n)$. Supposons désormais que $t < e$. Même si $k = t$, il n'est pas vrai que $v - r^k v \in L_2$, car $(1 - \zeta^t)v_1 \in \mathbb{Z}_K$ mais $(1 - \zeta^t)v_1 \notin (1 - \zeta)\mathbb{Z}_K$. Rappelons que $(1 - \zeta^{tp})\mathbb{Z}_K = (1 - \zeta^t)^p \mathbb{Z}_K$. Par conséquent,

$$v - r^{tp}v = (1 - \zeta^{tp})v_1 e_1 \in (1 - \zeta^t)^p \mathbb{Z}_K v_1 \subset (1 - \zeta^t)^{p-1} \mathbb{Z}_K v_1 \subset (1 - \zeta)^{p-2} L_2.$$

$(\tilde{W}_{L_2})_{\text{réf}}^x$ est engendré par $G(e/t, e/t, n)$ et r^{tp} , et donc on trouve que $(\tilde{W}_{L_2})_{\text{réf}}^x = G(e/t, p, n)$. \square

Enfin, nous pouvons démontrer le théorème principal.

Théorème 8.9. *Soit W un groupe de réflexions complexes imprimitif irréductible spécial non diédral, et soit L un réseau radiciel primitif pour W . L'ensemble des sous-groupes pseudoparaboliques (à conjugaison près) de W à l'égard de L est indiqué ci-dessous.*

Une représentation de W est de Springer à l'égard de L si et seulement si son symbole de poids spécial et d'un certain type (qui dépend de W et de L) est distingué. La table ci-dessous précise le type convenable pour chaque groupe W et

chaque réseau L .

groupe ; réseau	sous-groupes pseudoparaboliques	type des symboles
$G(e, 1, n)$, où $e = p^a$, p premier		
L_1	$\prod_{i=0}^{p-1} G(e, 1, n_i) \times \prod_{i=1}^k \mathfrak{S}_{m_i}$	$(p, 0)$
L_2	$G(e, 1, n_0) \times \prod_{i=1}^{p-1} G(e, e, n_i) \times \prod_{i=1}^k \mathfrak{S}_{m_i}$	$(p, p-1)$
$G(e, 1, n)$, où e n'est pas une puissance d'un nombre premier		
$L_1 = L_2$	$G(e, 1, n_0) \times \prod_{i=1}^k \mathfrak{S}_{m_i}$	$(1, 0)$
$G(e, e, n)$, où $e = p^a$, p premier, et $n \geq 3$		
L_2	$\prod_{i=0}^{p-1} G(e, e, n_i) \times \prod_{i=1}^k \mathfrak{S}_{m_i}$	$(p, 0)$
$G(e, e, n)$, où e n'est pas une puissance d'un nombre premier, et $n \geq 3$		
$L_1 = L_2$	$G(e, e, n_0) \times \prod_{i=1}^k \mathfrak{S}_{m_i}$	$(1, 0)$

Ici, on a que $k \geq 0$, et les n_i et les m_i sont des entiers tels $n_i \geq 0$, $m_i \geq 1$, et $\sum n_i + \sum m_i = n$.

Remarque 8.10. Le paramétrage des représentations de Springer fourni par ce théorème pour $G(2, 1, n)$ et L_1 (resp. $G(2, 1, n)$ et L_2 , $G(2, 2, n)$) coïncide avec celui provenant des classes unipotentes et de la correspondance de Springer pour un groupe algébrique de type B_n (resp. C_n , D_n).

Démonstration. Remarquons d'abord il suffit de calculer les sous-groupes pseudoparaboliques dans chaque cas ; le type convenable des symboles se déduit des résultats des Sections 6 et 7. Soit $x \in V/L$, et soit $v \in V$ un point dans l'image réciproque de x . On peut évidemment remplacer x et v par d'autres points dans leurs $G(e, 1, n)$ -orbites respectives sans changer la classe d'isomorphie du sous-groupe pseudoparabolique associé. On peut donc imposer l'hypothèse suivante sur $v = (v_1, \dots, v_n)$ sans perte de généralité : les coordonnées v_1, \dots, v_n se répartissent en "blocs"

$$v_1, \dots, v_{a_1}; \quad v_{a_1+1}, \dots, v_{a_2}; \quad \dots; \quad v_{a_{l-1}+1}, \dots, v_{a_l} \quad (\text{où } a_l = n)$$

tel que

$$\begin{aligned} v_i &\equiv v_j \pmod{\mathbb{Z}_K} && \text{si } i \text{ et } j \text{ appartiennent au même bloc,} \\ v_i &\not\equiv \zeta^k v_j \pmod{\mathbb{Z}_K} && \text{pour tout } k \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Si e est une puissance d'un nombre premier, soit p ledit nombre premier ; sinon, posons $p = 1$. Rappelons que $1 - \zeta$ engendre un idéal maximal de \mathbb{Z}_K au-dessus de $(p) \subset \mathbb{Z}$ si e est une puissance d'un nombre premier, et est inversible sinon. Dans tous les deux cas, on a que $\mathbb{Z}_K/(1-\zeta)\mathbb{Z}_K \simeq (1-\zeta)^{-1}\mathbb{Z}_K/\mathbb{Z}_K \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Évidemment, les entiers $0, 1, \dots, p-1$ décrivent un ensemble de représentants des éléments de $\mathbb{Z}_K/(1-\zeta)\mathbb{Z}_K$ ou de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. De même, les éléments $k/(1-\zeta)$, où $k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, décrivent un ensemble de représentants de $(1-\zeta)^{-1}\mathbb{Z}_K/\mathbb{Z}_K$. En particulier, il y a au plus p blocs de v dont les membres appartiennent à $(1-\zeta)^{-1}\mathbb{Z}_K$. Supposons, sans perte de généralité, que ces blocs-là soient les p premiers blocs, et que

$$v_i \equiv \frac{k}{1-\zeta} \pmod{\mathbb{Z}_K} \quad \text{si } k \in \{0, 1, \dots, p-1\} \text{ et } a_k + 1 \leq i \leq a_{k+1}.$$

(On permet que $a_{k-1} = a_k$, *i.e.*, que certains blocs soient vides). Pour s'assurer que les blocs ainsi définis sont bien distincts, il faut démontrer que $k/(1-\zeta) \not\equiv \zeta^l k'/(1-\zeta) \pmod{\mathbb{Z}_K}$ pour tout l si $k, k' \in \{0, \dots, p-1\}$ et $k \neq k'$. Ceci est très facile :

$$\begin{aligned} \frac{k}{1-\zeta} - \frac{\zeta^l k'}{1-\zeta} &= \frac{k-k'}{1-\zeta} + \frac{k' - \zeta^l k'}{1-\zeta} = \frac{k-k'}{1-\zeta} + (1+\zeta+\dots+\zeta^{l-1})k' \\ &\equiv \frac{k-k'}{1-\zeta} \pmod{\mathbb{Z}_K} \not\equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}_K}. \end{aligned}$$

On peut maintenant invoquer le Lemme 8.8 pour chaque bloc. Dans le premier bloc, on a $v_1, \dots, v_{a_1} \in \mathbb{Z}_K$, et le calcul du groupe $(\tilde{W}_{m,L})_{\text{spets}}^x$ là-bas donne le premier facteur de chaque sous-groupe pseudoparabolique dans la table ci-dessus.

Ensuite, considérons un bloc $v_{a_k+1}, \dots, v_{a_{k+1}}$ où $1 \leq k < p$. Dans le cadre du Lemme 8.8, on a $t = 1$, et on obtient ainsi $p-1$ facteurs de type $G(e, 1, m)$ ou $G(e, e, m)$, selon le réseau, dans chaque sous-groupe pseudoparabolique. Enfin, dans tous les bloc après le p -ème, on invoque ce lemme-là avec $t > 1$, et on trouve que $(\tilde{W}_{m,L})_{\text{spets}}^x$ est toujours un groupe symétrique. \square

8.2. Les groupes diédraux. On garde les notations de la section précédente : e est un entier positif, ζ est une e -ème racine de l'unité primitive, $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ et $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}[\zeta]$. Soit $V = Ke_1 \oplus Ke_2$. Nous considérons le groupe $W = G(e, e, 2)$. Le corps de définition de W est $K_0 = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$, mais pour certains calculs ultérieurs, il sera commode d'avoir défini W sur K .

Rappelons que tout sous-groupe de réflexions de W est isomorphe à $G(d, d, 2)$, où $d \mid e$. Posons

$$s_i = \begin{bmatrix} 0 & \zeta^i \\ \zeta^{-i} & 0 \end{bmatrix},$$

et pour tout diviseur d de e (e compris), identifions $G(d, d, 2)$ avec le sous-groupe de $GL(V)$ engendré par s_0 et $s_{e/d}$. Dans le cas où e/d est pair, on note $G'(d, d, 2)$ le sous-groupe engendré par s_1 et $s_{e/d+1}$. Ce dernier est isomorphe mais non conjugué à $G(d, d, 2)$. Tout sous-groupe de réflexions de W est conjugué ou bien à l'un des $G(d, d, 2)$ ou bien à l'un des $G'(d, d, 2)$.

Rappelons la classification des représentations irréductibles des groupes diédraux. Celles du groupe $G(d, d, 2)$ seront notées :

$$\chi_0^{(d)}, \chi_1^{(d)}, \dots, \chi_{\lfloor (d-1)/2 \rfloor}^{(d)}; \quad \chi_d^{(d)}; \quad \text{et, si } d \text{ est pair,} \quad \chi_{d/2}^{(d)}, \chi_{d/2}'^{(d)}.$$

(Les indices en bas indiquent les valeurs de la fonction b). La représentation triviale ($\chi_0^{(d)}$), la représentation réflexion ($\chi_1^{(d)}$), et la représentation signe ($\chi_d^{(d)}$) sont les seules représentations spéciales.

L'induite tronquée de la représentation triviale (resp. réflexion) à partir de n'importe quel $G(d, d, 2)$ ou $G'(d, d, 2)$ à $G(e, e, 2)$ est encore la représentation triviale (resp. réflexion). Par contre, on a :

$$j_{G(d,d,2)}^{G(e,e,2)} \chi_d^{(d)} = \chi_d^{(e)} \quad \text{et} \quad j_{G'(d,d,2)}^{G(e,e,2)} \chi_d^{(d)} = \begin{cases} \chi_d^{(e)} & \text{si } d \neq e/2, \\ \chi_{e/2}'^{(e)} & \text{si } d = e/2. \end{cases}$$

Enfin, nous avons besoin d'un réseau radiciel pour W . Posons

$$V_0 = \{v_1 e_1 + v_2 e_2 \in V \mid v_2 = -\bar{v}_1\}.$$

Il est facile de vérifier que V_0 est un K_0 -sous-espace de V qui est stable sous $G(e, e, 2)$, et que $V \simeq V_0 \otimes_{K_0} K$. Ensuite, posons

$$L_0 = \{v_1 e_1 - \bar{v}_1 e_2 \in V_0 \mid v_1 \in \mathbb{Z}_K\}.$$

L_0 est un \mathbb{Z}_{K_0} -réseau dans V_0 , stable sous $G(e, e, 2)$ et engendré par la $G(e, e, 2)$ -orbite du vecteur $e_1 - e_2 \in V_0$. Ce dernier étant une racine pour s_0 , on voit que L_0 est bien un réseau radiciel primitif. Rappelons maintenant le résultat de Nebe sur les réseaux radiciels des groupes diédraux.

Théorème 8.11 (Nebe). *L_0 est un représentant de l'unique genre de réseaux radiciels primitifs sauf si e est pair et $e/2$ est une puissance d'un nombre premier. Dans ce dernier cas, il y a deux genres de réseaux radiciels primitifs, dont l'un est représenté par L_0 , et l'autre par le réseau engendré par la W -orbite d'une racine pour s_1 .*

Pourtant, dans le cas où e est pair et $e/2$ est une puissance d'un nombre premier, l'automorphisme externe qui échange les deux classes de conjugaison de réflexions échange aussi les deux genres de réseaux radiciels (cf. les réseaux radiciels des groupes de Weyl de type $B_2 = G(4, 4, 2)$ ou $G_2 = G(6, 6, 2)$). Pour le calcul des sous-groupes pseudoparaboliques, il suffit de considérer seulement le réseau L_0 .

L'analogie du Lemme 8.8 est évident :

Lemme 8.12. *Pour le groupe diédral $W = G(e, e, 2)$, on a que $\tilde{W}_{L_0} = W$.*

Théorème 8.13. *Le sous-groupe $G(d, d, 2)$ de $G(e, e, 2)$ est pseudoparabolique si et seulement si d vérifie l'une des conditions suivantes :*

- $d = 1$,
- $d = e$,
- d divise e et est une puissance d'un nombre premier.

Si e est pair, $G'(d, d, 2)$ est pseudoparabolique si et seulement si e/d est un entier pair et l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- $d = 1$,
- $d < e/2$ et d est une puissance d'un nombre premier.

Si $e > 2$, l'ensemble de représentations de Springer de $G(e, e, 2)$ est :

$$\{\chi_0^{(e)}, \chi_1^{(e)}, \chi_e^{(e)}\} \cup \{\chi_d^{(e)} \mid d \text{ divise } e \text{ et est une puissance d'un nombre premier}\}.$$

En particulier, si e est pair et supérieur à 2, $\chi_{e/2}^{(e)}$ n'est pas de Springer.

Toute représentation irréductible de $G(2, 2, 2)$ est de Springer.

Exemple 8.14. Les sous-groupes pseudoparaboliques de $G(6, 6, 2) = G_2$ sont de type $G(1, 1, 2) = A_1$, $G(2, 2, 2) = A_1 \times A_1$, et $G(3, 3, 2) = A_2$. Il y a aussi un deuxième exemplaire de $A_1 = G'(1, 1, 2)$, qui est lui aussi pseudoparabolique, ainsi que de $A_2 = G'(3, 3, 2)$, qui ne l'est pas. Les représentations de Springer de G_2 sont $\chi_0, \chi_1, \chi_2, \chi_3$, et χ_6 (cf. [3]).

Démonstration. Le cas du groupe $G(2, 2, 2)$ est très facile : ce groupe-là est isomorphe à $\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$, dont toute représentation est spéciale et donc de Springer. On suppose désormais que $e > 2$.

La liste des représentations de Springer se déduit très facilement de la liste des sous-groupes pseudoparaboliques et des rappels ci-dessus sur l'induction tronquée. De plus, il est clair que tout groupe $(\tilde{W}_{L_0})_{\text{réf}}^x = W_{\text{réf}}^x$, étant lui aussi un groupe diédral, est déjà plein et spécial. Il suffit donc de trouver les $W_{\text{réf}}^x$.

Soit $v = v_1 e_1 - \bar{v}_1 e_2 \in V_0$, et soit x son image dans V_0/L_0 . Pour qu'une réflexion s_i appartienne à $W_{\text{réf}}^x$, il faut que $v - s_i v$ soit dans L_0 . On a :

$$\begin{aligned} s_i v &= -\zeta^i \bar{v}_1 e_1 + \zeta^{-i} v_1 e_2, \\ v - s_i v &= (v_1 + \zeta^i \bar{v}_1) e_1 - (\bar{v}_1 + \zeta^{-i} v_1), \end{aligned}$$

et donc on voit que $s_i \in W_{\text{réf}}^x$ si et seulement si

$$(17) \quad v_1 + \zeta^i \bar{v}_1 \in \mathbb{Z}_K.$$

Démontrons d'abord que pour que $G(d, d, 2)$ ou $G'(d, d, 2)$ soit pseudoparabolique, il faut que d soit 1 ou une puissance d'un nombre premier. Si s_0 et $s_{e/d}$ (resp. s_1 et $s_{e/d+1}$) appartiennent à $W_{\text{réf}}^x$, alors

$$\begin{array}{ccc} v_1 + \bar{v}_1 \in \mathbb{Z}_K & & v_1 + \zeta \bar{v}_1 \in \mathbb{Z}_K \\ v_1 + \zeta^{e/d} \bar{v}_1 \in \mathbb{Z}_K & \text{resp.} & v_1 + \zeta^{e/d+1} \bar{v}_1 \in \mathbb{Z}_K \end{array}$$

et donc

$$(18) \quad (1 - \zeta^{e/d}) \bar{v}_1 \in \mathbb{Z}_K \quad \text{resp.} \quad \zeta(1 - \zeta^{e/d}) \bar{v}_1 \in \mathbb{Z}_K.$$

Si d n'est pas égal à 1 ou une puissance d'un nombre premier, alors $1 - \zeta^{e/d}$ est inversible dans \mathbb{Z}_K ($\zeta^{e/d}$ étant une d -ème racine de l'unité primitive), et donc on voit que $\bar{v}_1 \in \mathbb{Z}_K$. Il s'ensuit que $v \in L_0$ et que $W_{\text{réf}}^x = W$.

Avant de faire le prochain pas, rappelons que $K = K_0[\zeta]$ est une extension de K_0 de degré 2, et que $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}_{K_0}[\zeta]$. Tout élément de K s'écrit $\alpha + \beta\zeta$, où $\alpha, \beta \in K_0$, de manière unique, et un tel élément appartient à \mathbb{Z}_K si et seulement si $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{K_0}$.

Ensuite, démontrons que $G'(e/2, e/2, 2)$ n'est pas pseudoparabolique. Si x est stable sous $G'(e/2, e/2, 2)$, alors, selon (18), on a que $(1 - \zeta^2) \bar{v}_1 \in \mathbb{Z}_K$. L'expression pour $(1 - \zeta^2) \bar{v}_1$ telle que décrite au paragraphe précédent est

$$(v_1 + \bar{v}_1) + (-\zeta^{-1} v_1 - \zeta \bar{v}_1) \zeta = (1 - \zeta^2) \bar{v}_1.$$

En particulier, on voit que $v_1 + \bar{v}_1 \in \mathbb{Z}_{K_0} \subset \mathbb{Z}_K$. À la suite de (17), on voit que $s_0 \in W_{\text{réf}}^x$. Puisqu'on avait déjà supposé que $s_1 \in W_{\text{réf}}^x$, il s'ensuit que $W_{\text{réf}}^x = W$.

Enfin, si l'on n'est pas dans les deux cas précédents, on peut construire explicitement un vecteur v tel que $W_{\text{réf}}^x$ égale $G(d, d, 2)$ (resp. $G'(d, d, 2)$). Posons

$$v_1 = \frac{1}{1 - \zeta^{-e/d}} \quad \text{resp.} \quad v_1 = \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta^{-e/d}}$$

et $v = v_1 e_1 - \bar{v}_1 e_2$. Pour montrer que $G(d, d, 2) \subset W_{\text{réf}}^x$ (resp. $G'(d, d, 2) \subset W_{\text{réf}}^x$), il suffit de montrer que l'égalité (18) est vérifiée pour $i = 0, e/d$ (resp. $i = 1, e/d + 1$).

En effet, après des calculs très faciles, on trouve que

$$\begin{array}{ccc} v_1 + \bar{v}_1 = 1, & & v_1 + \zeta \bar{v}_1 = 1 + \zeta, \\ v_1 + \zeta^{e/d} \bar{v}_1 = 0 & \text{resp.} & v_1 + \zeta^{e/d+1} \bar{v}_1 = 0. \end{array}$$

Par exemple, la première égalité ci-dessus se montre comme suit :

$$v_1 + \bar{v}_1 = \frac{1}{1 - \zeta^{-e/d}} + \frac{1}{1 - \zeta^{e/d}} = \frac{(1 - \zeta^{e/d}) + (1 - \zeta^{-e/d})}{(1 - \zeta^{-e/d})(1 - \zeta^{e/d})} = \frac{2 - \zeta^{e/d} - \zeta^{-e/d}}{2 - \zeta^{e/d} - \zeta^{-e/d}} = 1.$$

Il reste de s'assurer que $W_{\text{réf}}^x$ ne soit pas plus grand qu'on ait voulu. Si l'on avait $W_{\text{réf}}^x = G(f, f, 2)$ (resp. $G'(f, f, 2)$) avec $f > d$, alors, selon (18), on aurait que $(1 - \zeta^{e/f}) \bar{v}_1 \in \mathbb{Z}_K$, où $e/f < e/d$.

Par contre, nous verrons maintenant que le plus petit entier strictement positif t tel que $(1 - \zeta^t)\bar{v}_1 \in \mathbb{Z}_K$ est $t = e/d$. C'est clair dans le cas de $G(d, d, 2)$, où on a $\bar{v}_1 = 1/(1 - \zeta^{e/d})$. Pour $G'(d, d, 2)$, si $e/2$ n'est pas une puissance d'un nombre premier, alors $1 + \zeta^{-1}$ est inversible (car $-\zeta^{-1}$ est une racine de l'unité d'ordre soit e , soit $e/2$), et encore une fois il est clair que $t = e/d$ pour $\bar{v}_1 = (1 + \zeta^{-1})/(1 - \zeta^{e/d})$.

Enfin, si $e/2$ est bien une puissance d'un nombre premier, alors d doit être une puissance du même nombre premier : écrivons $e = 2p^a$ et $d = p^b$, où $b < a$ (puisque'on a supposé que $d < e/2$). Posons $c = a - b$; alors on a que

$$\bar{v}_1 = \frac{1 + \zeta^{-1}}{1 - \zeta^{2p^c}} = \frac{1 + \zeta^{-1}}{(1 - \zeta^{p^c})(1 + \zeta^{p^c})}.$$

Supposons d'abord que p soit impair. Alors $-\zeta^{-1}$, ζ^{p^c} , $-\zeta^{p^c}$ sont des racines de l'unité d'ordre p^a , $2p^b$, p^b , respectivement. Le module de \bar{v}_1 (c'est-à-dire, le produit de ses conjugués par $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$) est donc

$$|\bar{v}_1| = \frac{|1 + \zeta^{-1}|}{|1 - \zeta^{p^c}| \cdot |1 + \zeta^{p^c}|} = \frac{p}{1 \cdot p^{p^c}} = p^{1-p^c}.$$

(Voir, par exemple, [17]). On voit ici la nécessité d'avoir supposé $c > 0$. Pour que $(1 - \zeta^t)\bar{v}_1$ soit dans \mathbb{Z}_K , il faut que $|1 - \zeta^t| \geq p^{p^c-1}$. Le plus petit tel t est $t = 2p^c = e/d$, avec $|1 - \zeta^t| = p^{p^c}$.

Dans le cas où $p = 2$, le calcul est presque pareil : cette fois, les ordres de $-\zeta^{-1}$, ζ^{p^c} , $-\zeta^{p^c}$ sont 2^{a+1} , 2^{b+1} , 2^{b+1} , respectivement, et

$$|\bar{v}_1| = \frac{|1 + \zeta^{-1}|}{|1 - \zeta^{p^c}| \cdot |1 + \zeta^{p^c}|} = \frac{2}{2^{2^c-1} \cdot 2^{2^c-1}} = 2^{1-2^c}.$$

Ensuite, le même argument montre que $t = e/d$ est le plus petit entier tel que $(1 - \zeta^t)\bar{v}_1 \in \mathbb{Z}_K$. \square

RÉFÉRENCES

- [1] M. Broué et S. Kim, *Familles de caractères des algèbres de Hecke cyclotomiques*, Adv. Math. **172** (2002), no. 1, pp. 53–136.
- [2] M. Broué, G. Malle et R. Rouquier, *Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras*, J. Reine Angew. Math. **500** (1998), pp. 127–190.
- [3] R. Carter, *Finite groups of Lie type : conjugacy classes and complex characters*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, New York, 1985.
- [4] C. Chevalley, *Invariants of finite groups generated by reflections*, Amer. J. Math. **77** (1955), pp. 778–782.
- [5] S. Kim, *Families of the characters of the cyclotomic Hecke algebras of $G(de, e, r)$* , J. Algebra **289** (2005), no. 2, pp. 346–364.
- [6] G. Lusztig, *A class of irreducible representations of a Weyl group*, Indag. Math. **41** (1979), pp. 323–335.
- [7] G. Malle, *Unipotente Grade imprimitiver komplexer Spiegelungsgruppen*, J. Algebra **177** (1995), pp. 768–826.
- [8] G. Malle, *Spetses*, Doc. Math. J., Extra Volume ICM 1998, II, pp. 87–96.
- [9] G. Malle, *On the generic degree of cyclotomic algebras*, Represent. Theory **4** (2000), pp. 342–369.
- [10] G. Malle et R. Rouquier, *Familles de caractères de groupes de réflexions complexes*, Represent. Theory **7** (2003), pp. 610–640.
- [11] G. Nebe, *The root lattices of the complex reflection groups*, J. Group Theory **2** (1999), pp. 15–38.

- [12] R. Rouquier, *Familles et blocs d'algèbres de Hecke*, C.R. Acad. Sci. Paris **329** (1999), pp 1037–1042.
- [13] T. Shoji, Green functions associated to complex reflection groups $G(e, 1, n)$, Physics and combinatorics, 2000 (Nagoya), 281–298, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001.
- [14] T. Shoji, Green functions associated to complex reflection groups, J. Algebra **245** (2001), no. 2, 650–694.
- [15] T. Shoji, Green functions associated to complex reflection groups. II, J. Algebra **258** (2002), no. 2, 563–598.
- [16] T.A. Springer, *Regular elements of finite reflection groups*, Invent. Math. **25** (1974), pp. 159–198.
- [17] L. C. Washington, *Introduction to cyclotomic Fields*, 2ème edition, Graduate Texts in Mathematics no. 83, Springer–Verlag, 1997.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, LOUISIANA STATE UNIVERSITY, BATON ROUGE, LA 70803, USA

E-mail address: `pramod@math.lsu.edu`

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU, UMR 7586 DU C.N.R.S., F-75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE

E-mail address: `aubert@math.jussieu.fr`