

SUPPORTS UNIPOTENTS DE FAISCEAUX CARACTÈRES

PRAMOD N. ACHAR ET ANNE-MARIE AUBERT

RÉSUMÉ. Soit G un groupe algébrique réductif sur la clôture algébrique d'un corps fini \mathbb{F}_q et défini sur ce dernier. L'existence du support unipotent d'un caractère irréductible du groupe fini $G(\mathbb{F}_q)$, ou d'un faisceau caractère de G , a été établie dans différents cas par Lusztig, Geck et Malle, et le second auteur. Dans cet article, nous démontrons que toute classe unipotente sur laquelle la restriction du faisceau caractère ou du caractère donné est non nulle est contenue l'adhérence de Zariski de son support unipotent. Pour établir ce résultat, nous étudions certaines représentations des groupes de Weyl, dites "bien supportées".

1. INTRODUCTION

Soit $\bar{\mathbb{F}}_q$ la clôture algébrique d'un corps fini \mathbb{F}_q , et soit p sa caractéristique. Soit G un groupe algébrique réductif sur $\bar{\mathbb{F}}_q$ qui est défini sur \mathbb{F}_q , et soit F l'endomorphisme de Frobenius associé à la structure \mathbb{F}_q -rationnelle de G . Étant donné un caractère irréductible ρ de G^F , Lusztig a posé en 1980 le problème de lui associer une classe unipotente F -stable \mathcal{O} de G telle que la restriction de ρ à \mathcal{O}^F soit non nulle, et telle que la dimension de \mathcal{O} soit maximale parmi les classes unipotentes possédant cette propriété. Une telle classe est appelée le *support unipotent* du caractère. Lusztig a résolu lui-même ce problème en 1992 [23], sous l'hypothèse que p est suffisamment grand. Dans le même article, il a aussi établi un résultat concernant le support unipotent des faisceaux caractères. Geck et Malle ont réussi à enlever l'hypothèse sur p dans le cas d'une notion légèrement différente de support unipotent de caractère [10], [13]. Quant aux faisceaux caractères, le second auteur a étendu le résultat de Lusztig au cas où la caractéristique est bonne [3], en utilisant la même approche que celle employée par Lusztig dans [20].

Le but du présent article est de raffiner la description de l'ensemble des classes unipotentes sur lesquelles la restriction d'un caractère ou d'un faisceau caractère est non nulle, par une étude détaillée des représentations induites des groupes de Weyl. Si \mathcal{O} est une classe unipotente de G , soit $A(\mathcal{O})$ le groupe des composantes du centralisateur d'un élément de \mathcal{O} . Soit W le groupe de Weyl de G , et soit \mathcal{N}_G l'ensemble des couples (\mathcal{O}, π) où \mathcal{O} est une classe unipotente et π est une représentation irréductible du groupe $A(\mathcal{O})$. Rappelons que la correspondance de Springer associe à toute représentation irréductible de W un élément de \mathcal{N}_G . Cette application, notée $\nu: \text{Irr}(W) \rightarrow \mathcal{N}_G$, est injective. À la section 2, nous introduisons le concept d'être "(spécialement) bien supporté" : une représentation de W est dite (spécialement) bien supportée si les éléments de \mathcal{N}_G correspondant à ses composantes irréductibles vérifient certaines conditions. Le fait qui rend ce concept utile est le théorème 4.4,

Date: 15 novembre 2004.

Le premier auteur était partiellement appuyé par une bourse post-doctorale de la NSF.

qui affirme qu'une représentation induite d'une représentation spécialement bien supportée est bien supportée.

La section 5 traite des liens entre les développements des deux sections précédentes et l'ordre partiel introduit par le premier auteur en [1] sur les classes de conjugaison du quotient de Lusztig associé à une classe unipotente. Aux sections 6–8 sont établis les résultats principaux de l'article. Ces énoncés affirment que toute classe unipotente sur laquelle la restriction d'un faisceau caractère ou d'un caractère irréductible ou de la valeur moyenne de ce dernier, respectivement, est non nulle est contenue dans l'adhérence de Zariski du support unipotent de celui-ci. La version qui traite des valeurs moyennes de caractères étend un résultat établi par Geck et Malle pour les caractères unipotents. La dernière section de l'article donne une application au front d'onde des caractères, généralisant un résultat de Lusztig et de Kawanaka.

Nous aimerions remercier F. Lübeck et K. McGerty pour des conversations utiles ainsi que le rapporteur dont les commentaires détaillés nous ont permis d'améliorer l'article.

Nous noterons $N_G(H)$ (resp. $C_G(H)$) le normalisateur (resp. le centralisateur) d'un sous-groupe H dans un groupe G et $Z(G)$ le centre de G . Si K est un groupe fini, $\text{Irr}(K)$ désignera l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de K , et $\text{Cl}(K)$ l'ensemble des classes de conjugaison de K . Nous noterons $x \mapsto \bar{x}$ désigne l'automorphisme de corps qui envoie les racines de l'unité sur leurs inverses. Si $\langle \gamma \rangle$ est un groupe engendré par γ qui agit sur K , nous désignerons par $\mathcal{C}(K/\gamma)$ l'espace des fonctions γ -centrales sur K (*i.e.*, qui vérifient $f(k(\gamma \cdot k')) = f(k'k)$ pour tout $(k, k') \in K^2$) à valeurs complexes et nous identifierons $\mathcal{C}(K/\gamma)$ à l'espace des restrictions à $K \cdot \gamma$ des fonctions centrales sur le produit semi-direct $K \rtimes \langle \gamma \rangle$. Si $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(K/\gamma)$, nous poserons

$$(1) \quad \langle f_1, f_2 \rangle_{H \cdot \gamma} := \frac{1}{|K|} \sum_{x \in K \cdot \gamma} f_1(x) \overline{f_2(x)}.$$

2. RAPPELS SUR LES CLASSES UNIPOTENTES ET LES GROUPES DE WEYL

Dans cette section, nous allons rappeler certains concepts clés qui nous seront utiles dans la suite. La première partie traite des degrés générique et fantôme d'une représentation de W , puis introduit le quotient de Lusztig de $A(\mathcal{O})$. Nous rappelons ensuite la relation entre les cellules bilatères de W et les pièces spéciales de la variété unipotente, ainsi que la notion de famille de représentations de W introduite par Lusztig. La dernière partie est consacrée à l'étude de plusieurs sortes d'induction. Nous ne prétendons pas d'avoir traité ces thèmes d'une manière approfondie : nous nous contentons simplement ici de donner une brève liste des faits dont nous aurons besoin plus tard.

2.1. Le quotient de Lusztig. À toute représentation d'un groupe de Weyl W sont associés deux polynômes d'une variable q , le degré générique et le degré fantôme. Le degré générique donne la dimension de la représentation unipotente correspondante du groupe de Chevalley fini $G(\mathbb{F}_q)$, tandis que le degré fantôme est tel que le coefficient de q^i donne la multiplicité de la représentation donnée dans S_W^i , où S_W est l'algèbre co-invariante de W , considérée comme un module gradué pour W (pour les groupes de type A , les deux sont égaux).

Nous définissons maintenant deux entiers qui sont associés à une représentation de W quelconque. La *a-valeur* d'une représentation est l'entier i le plus petit tel que le coefficient de q^i soit non zéro dans le degré fantôme. La *\tilde{a} -valeur* est la même quantité à l'égard du degré générique. (Nous suivons ici les notations de Carter [7]; ailleurs dans la littérature, ces entiers sont appelés la *b-valeur* et la *a-valeur*, respectivement). D'après Lusztig, une représentation est dite *spéciale* si sa *a-valeur* et sa *\tilde{a} -valeur* sont égales.

Soit \mathcal{N}_G l'ensemble des couples (\mathcal{O}, π) où \mathcal{O} est une classe unipotente et π est une représentation irréductible du groupe $A(\mathcal{O})$. Les classes unipotentes spéciales sont les classes \mathcal{O} telles que $(\mathcal{O}, 1)$ correspond à une représentation spéciale via la correspondance de Springer $\nu: \text{Irr}(W) \hookrightarrow \mathcal{N}_G$. Nous dirons qu'une telle classe \mathcal{O} est *la classe unipotente spéciale associée* à la représentation spéciale considérée. Pour toute classe unipotente \mathcal{O} , nous appellerons la représentation $\nu^{-1}(\mathcal{O}, 1)$ de W *la représentation de Springer de \mathcal{O}* .

Le quotient de Lusztig de $A(\mathcal{O})$, noté $\bar{A}(\mathcal{O})$, est défini en termes des *a-valeurs* et des *\tilde{a} -valeurs*. Pour une classe \mathcal{O} donnée, nous considérons toutes les représentations de W qui correspondent à des couples (\mathcal{O}, π) . En particulier, soit E_0 la représentation de W associée à $(\mathcal{O}, 1)$. Soit $K \subset A(\mathcal{O})$ l'intersection des noyaux des représentations π telles que $(\mathcal{O}, \pi) = \nu(E)$ où E est une représentation de W dont la *\tilde{a} -valeur* est égale à celle de E_0 . Le quotient de Lusztig est le quotient de $A(\mathcal{O})$ par K (à l'origine, Lusztig fit cette définition seulement pour les classes spéciales, mais Sommers remarqua qu'elle est également valable pour les classes non spéciales).

2.2. Cellules bilatères. Rappelons maintenant quelques faits sur les cellules bilatères. Il s'agit de certains sous-ensembles de l'ensemble des éléments de W , définis via l'action de W sur son algèbre de Hecke. Les éléments d'une cellule bilatère correspondent à une base pour un module (non irréductible, en général) de W , et on peut donc parler d'une représentation qui "apparaît" dans une cellule bilatère. Toute représentation de W apparaît dans une unique cellule bilatère et chaque cellule bilatère contient une unique représentation spéciale. Nous appellerons *classe spéciale associée* à une cellule bilatère \mathbf{c} la classe unipotente spéciale associée à l'unique représentation spéciale contenue dans \mathbf{c} .

Lusztig a trouvé une relation intéressante entre les cellules bilatères et les représentations de Springer, fondée sur la notion de *pièce spéciale*. Une pièce spéciale est la réunion d'une classe unipotente spéciale et toutes les classes unipotentes dans son adhérence de Zariski qui n'appartiennent à l'adhérence de Zariski d'aucune classe spéciale plus petite. Donc une pièce spéciale contient une classe spéciale et un certain nombre (éventuellement nul) de classes non spéciales. Spaltenstein a montré que toute classe unipotente appartient à une unique pièce spéciale, et donc que les pièces spéciales constituent une partition de la variété unipotente. Le théorème suivant, qui relie les pièces spéciales aux cellules bilatères, est un corollaire immédiat d'un résultat de Lusztig [25, Theorem 0.2].

Théorème 2.1. *Soient \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 deux classes unipotentes de représentations de Springer respectives E_1 et E_2 . Les classes \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 appartiennent à la même pièce spéciale si et seulement si E_1 et E_2 appartiennent à la même cellule bilatère.*

Si l'une des représentations E_i correspond à un couple $(\mathcal{O}_i, \pi_i) \in \mathcal{N}_G$ avec π_i non triviale, l'analogie de l'énoncé ci-dessus n'est pas vrai : il est possible, dans ce

cas, que \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 n'appartiennent pas à la même pièce spéciale. Néanmoins, Geck et Malle ont obtenu le résultat suivant dans ce contexte.

Proposition 2.2 ([13, Proposition 2.2]). *Soit E une représentation spéciale de W qui correspond à la classe \mathcal{O} . Si E_1 est une représentation irréductible dans la cellule bilatère de E , alors E_1 est associée par la correspondance de Springer à un couple (\mathcal{O}_1, π_1) tel que $\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}$.*

2.3. Familles de Lusztig. Lusztig a défini une partition de $\text{Irr}(W)$ en familles de la manière suivante. Si $W = \{1\}$, il y a une famille unique, constituée par la représentation triviale de W . Supposons maintenant que W possède au moins deux éléments et que les familles ont déjà été définies pour tous les sous-groupes paraboliques standard propres de W . On dit alors deux représentations irréductibles E et E' de W appartiennent à la même famille s'il existe une suite $E = E_0, E_1, \dots, E_r = E'$ de représentations irréductibles de W , telles que, pour chaque i ($0 \leq i \leq r-1$), il existe un sous-groupe parabolique propre standard W_i de W et des représentations irréductibles M'_i, M''_i de W_i , appartenant à une même famille de W_i , telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle M'_i, E_{i-1} \rangle_{W_i} \neq 0, \tilde{a}_{M'_i} = \tilde{a}_{E_{i-1}}, \\ \langle M''_i, E_i \rangle_{W_i} \neq 0, \tilde{a}_{M''_i} = \tilde{a}_{E_i} \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle M'_i, E_{i-1} \otimes \varepsilon \rangle_{W_i} \neq 0, \tilde{a}_{M'_i} = \tilde{a}_{E_{i-1} \otimes \varepsilon}, \\ \langle M''_i, E_i \otimes \varepsilon \rangle_{W_i} \neq 0, \tilde{a}_{M''_i} = \tilde{a}_{E_i \otimes \varepsilon}, \end{array} \right.$$

où ε est la représentations signe du groupe W . La fonction \tilde{a} est constante sur chaque famille. Barbasch et Vogan ont montré que deux représentations irréductibles de W appartiennent à une même famille si et seulement si elles apparaissent dans une même cellule bilatère, [5, Theorem 2.29] (voir aussi [4]). Nous dirons que la cellule et la famille *se correspondent*. Une cellule bilatère sera dite *cuspidale* si la famille qui lui correspond est cuspidale au sens de [18, (8.1)].

Lusztig a associé à toute famille \mathcal{F} de W un groupe fini $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$. Ce groupe s'identifie au groupe $\tilde{A}(\mathcal{O})$, où \mathcal{O} est la classe unipotente spéciale associée à la cellule bilatère de W qui correspond à la famille \mathcal{F} .

2.4. Induction. Pour l'étude des supports des faisceaux caractères, nous voudrions connaître des propriétés des représentations de W induites à partir d'une certaine classe de sous-groupes de W . Il est commode d'introduire en même temps une classe analogue de sous-groupes de G . Dans la terminologie introduite par Sommers, un sous-groupe de G est appelé un *pseudo sous-groupe de Levi* s'il est le centralisateur d'un élément semi-simple. Un sous-groupe de W qui est le groupe de Weyl d'un pseudo sous-groupe de Levi sera appelé un *pseudo sous-groupe parabolique*. Une autre description est obtenue comme suit. Supposons choisi un ensemble Π de racines simples positives de W . Soit $\Pi_0 = \Pi \cup \{\alpha_0\}$, où α_0 est l'opposé de la plus haute racine. Rappelons qu'un sous-groupe de G (resp. de W) est un sous-groupe de Levi (resp. parabolique) s'il correspond à un sous-système de racines engendré par un sous-ensemble de Π . Un sous-groupe de G (resp. de W) est un pseudo sous-groupe de Levi (resp. pseudo sous-groupe parabolique) s'il correspond à un sous-système de racines engendré par un sous-ensemble propre de Π_0 .

Une classe de sous-groupes de W qui sera très importante pour nous est celle fournie par l'ensemble des pseudo sous-groupes de Levi du groupe dual G^* de G . Puisque le groupe de Weyl de G et celui de G^* sont canoniquement isomorphes, nous pouvons considérer les pseudo sous-groupes paraboliques du groupe de Weyl de G^* comme sous-groupes de W lui-même. Par abus de langage, nous appellerons

de tels sous-groupes de W *pseudo sous-groupes paraboliques du dual de W* . De plus, la correspondance entre les sous-groupes de Levi de G et ceux de G^* montre que tout sous-groupe parabolique de W est aussi un pseudo sous-groupe parabolique de son dual.

Si W' est un pseudo sous-groupe parabolique du dual de W et E est une représentation irréductible de W' , il y a deux sous-modules de $\text{Ind}_{W'}^W E$ auxquels il faut prêter attention. Notons $j_{W'}^W E$ la somme des composantes irréductibles de $\text{Ind}_{W'}^W E$ qui ont la même a -valeur que E . La somme de ceux qui ont la même \tilde{a} -valeur que E sera notée $J_{W'}^W E$. Sous certaines hypothèses, qui sont toujours satisfaites si, par exemple, E est spéciale, le module $j_{W'}^W E$ est lui aussi irréductible. Plus précisément, si E est spéciale, ce module, appelé *l'induction tronquée* de E , est toujours une représentation de Springer d'une certaine classe unipotente. De plus, si W' est un sous-groupe parabolique, alors l'induction tronquée de E est aussi spéciale.

L'induction pour les représentations des groupes de Weyl est intimement liée à certains autres types d'induction. L'induction pour les classes unipotentes est précisément l'induction tronquée des représentations de Springer correspondantes. De surcroît, pour toute cellule bilatère \mathbf{c}' d'un pseudo sous-groupe parabolique W' du dual, on peut considérer la cellule qui contient la j -induction de l'unique représentation spéciale de \mathbf{c}' . Appelons cette cellule la cellule *induite* de \mathbf{c}' . (Cette terminologie est en accord avec la théorie d'induction plus sophistiquée introduite par Xi dans [32]). La représentation $J_{W'}^W E$ est telle que toutes ses composantes irréductibles appartiennent à une unique cellule bilatère, qui est la cellule induite de celle à laquelle appartient E .

L'ensemble des cellules bilatères est muni d'un ordre partiel naturel provenant de leur définition en termes de l'action de W sur son algèbre de Hecke. D'autre part, cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des classes unipotentes spéciales, qui hérite un ordre partiel de l'ensemble de toutes les classes unipotentes. Barbasch et Vogan ont démontré que ces deux ordres coïncident [6, Proposition 3.23]. Cette équivalence permet de voir que l'induction des cellules bilatères est une application croissante, en la comparant avec l'induction des classes unipotentes. D'après Spaltenstein, cette dernière opération est croissante. Soient \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 deux classes induites telles que $\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}_2$, et soient \mathcal{O}'_1 et \mathcal{O}'_2 les classes spéciales dans leurs pièces spéciales respectives. Pour voir que l'induction des cellules est croissante, il faut démontrer que $\mathcal{O}'_1 \leq \mathcal{O}'_2$, laquelle inégalité est impliquée par certaines propriétés de l'application de dualité d de Spaltenstein. Cette application est décroissante, donc $d^2(\mathcal{O}_1) \leq d^2(\mathcal{O}_2)$. De plus, $d^2(\mathcal{O})$ est toujours la plus petite classe unipotente spéciale dont l'adhérence de Zariski contient \mathcal{O} . Autrement dit, $d^2(\mathcal{O})$ est l'unique classe spéciale dans la pièce spéciale de \mathcal{O} . On déduit que $\mathcal{O}'_1 \leq \mathcal{O}'_2$.

3. PARTITIONS, PARTITIONS MARQUÉES, SYMBOLES ET u -SYMBOLES

Les résultats obtenus dans cette section nous serviront dans les démonstrations des propositions 5.3 et 4.3 dans le cas des groupes classiques.

3.1. Partitions et partitions marquées. Soient N un entier et $\mathcal{P}(N)$ l'ensemble des partitions de N . Pour tout élément $\lambda = [\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k]$ de $\mathcal{P}(N)$, nous poserons $|\lambda| = N$ et nous noterons $\sigma_i(\lambda)$ la somme des i plus grandes parties de λ :

c'est-à-dire,

$$\sigma_i(\lambda) = \sum_{j=k-i+1}^k \lambda_j.$$

Pour tout entier a , nous désignerons par $r_\lambda(a)$ le nombre de parties de λ égales à a (si a ne figure pas parmi les λ_j , le nombre $r_\lambda(a)$ est égal à 0). Nous appellerons *hauteur* de a (par rapport à λ) le nombre $\text{ht}_\lambda(a)$ de parties de λ supérieures ou égales à a : c'est-à-dire,

$$\text{ht}_\lambda(a) = \sum_{b \geq a} r_\lambda(b).$$

Nous noterons λ^* la partition transposée de λ .

Si $\lambda = [\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k]$ et $\mu = [\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k]$ sont des partitions, nous noterons $\lambda \vee \mu$ et $\lambda \cup \mu$ les partitions de $|\lambda| + |\mu|$ respectivement définies par $(\lambda \vee \mu)_i = \lambda_i + \mu_i$ et par $r_{\lambda \cup \mu}(a) = r_\lambda(a) + r_\mu(a)$, pour tout entier a . Nous dirons que $\lambda \vee \mu$ (resp. $\lambda \cup \mu$) est la partition *jointe* (resp. l'*union*) de λ et μ . On a $\lambda \vee \mu = (\lambda^* \cup \mu^*)^*$.

Nous noterons \leq l'ordre partiel usuel sur $\mathcal{P}(N)$: c'est-à-dire : $\lambda \leq \mu$ si $\sigma_i(\lambda) \leq \sigma_i(\mu)$ pour tout i .

Si N est impair, nous noterons $\mathcal{P}_B(N)$ l'ensemble des partitions de N dont toute partie paire apparaît un nombre pair de fois. Si N est pair, nous noterons $\mathcal{P}_C(N)$ l'ensemble des partitions de N dont toute partie impaire apparaît un nombre pair de fois et $\mathcal{P}_D(N)$ l'ensemble des partitions de N dont toute partie paire apparaît un nombre pair de fois. Pour X égal à B , C ou D , nous définissons $\tilde{\mathcal{P}}_X(N)$ comme l'ensemble des couples de partitions ${}^{(\nu)}\lambda = (\lambda, \nu)$, où toute partie de ν est impaire (resp. paire) si X est égal à B ou D (resp. C) et intervient avec multiplicité 1 dans λ , la partition ν a un nombre pair de parties si X est égal à B ou D et où $\lambda \in \mathcal{P}_X(N)$ est l'union de ν et d'une partition de $|\lambda| - |\nu|$. Suivant la terminologie de [1, §3.3], nous dirons que ${}^{(\nu)}\lambda$ est une *partition marquée* et nous appellerons λ et ν respectivement la *partition sous-jacente* et la *partition marquante*. Une partition marquée de la forme ${}^{(\emptyset)}\lambda$ sera dite *trivialement marquée*. Si λ est une partition appartenant à $\mathcal{P}_B(N)$ (resp. $\mathcal{P}_C(N)$, $\mathcal{P}_D(N)$), nous dirons qu'une partie de λ est *marquable* si elle est impaire (resp. paire, impaire). Nous noterons $\tilde{\mathcal{P}}_X^\circ(N)$ le sous-ensemble de $\tilde{\mathcal{P}}_X(N)$ formé des partitions marquées ${}^{(\nu)}\lambda$ telles que ν soit uniquement constituée de parties marquables de λ .

Soit $\tilde{\mathcal{N}}'_G$ l'ensemble des couples (\mathcal{O}, C) où \mathcal{O} est une classe unipotente et C est une classe de conjugaison de $\tilde{A}(\mathcal{O})$. L'ensemble $\tilde{\mathcal{P}}_X^\circ(N)$ est en bijection avec $\tilde{\mathcal{N}}'_G$ (voir [1, §3]).

Les groupes G et G^* possédant des groupes de Weyl isomorphes, il existe une bijection naturelle entre leurs ensembles d'orbites unipotentes spéciales. Spaltenstein a remarqué que cette bijection préserve l'ordre. En la composant avec d , on obtient une application de l'ensemble X_G des orbites unipotentes de G dans X_{G^*} . Barbasch et Vogan ont donné une construction intrinsèque de l'incarnation de cette application et Sommers a montré comment déduire de celle-ci une application d_S de $\tilde{\mathcal{N}}'_G$ sur X_{G^*} .

Dans [1] a été introduit un ordre partiel naturel sur $\tilde{\mathcal{N}}'_G$. Cet ordre est défini de la manière suivante : deux couples (\mathcal{O}, C) et (\mathcal{O}', C') de $\tilde{\mathcal{N}}'_G$ vérifient $(\mathcal{O}, C) \leq (\mathcal{O}', C')$ si $\mathcal{O} \leq \mathcal{O}'$ et si $d_S(\mathcal{O}, C) \geq d_S(\mathcal{O}', C')$. Cet ordre est bien défini, puisque si $C, C' \subset A(\mathcal{O})$ sont deux classes de conjugaison associées à une même orbite \mathcal{O} ,

alors $d_S(\mathcal{O}, C) = d_S(\mathcal{O}, C')$ si et seulement si C et C' ont même image dans $\bar{A}(\mathcal{O})$, [1, Theorem 1.1]. Nous écrivons $\langle \nu \rangle \lambda \leq \langle \nu' \rangle \lambda$ si les partitions marquées $\langle \nu \rangle \lambda$ et $\langle \nu' \rangle \lambda$ correspondent, via la bijection entre $\widetilde{\mathcal{P}}_X^{\circ}(N)$ et $\widetilde{\mathcal{N}}_G'$, à des couples (\mathcal{O}, C) et (\mathcal{O}', C') satisfaisant $(\mathcal{O}, C) \leq (\mathcal{O}', C')$.

Proposition 3.1. *Soient $\langle \nu \rangle \lambda$ et $\langle \nu' \rangle \lambda$ deux partitions marquées associées à une même partition sous-jacente λ . Supposons que ν et ν' aient toutes deux un nombre pair de parties, en ajoutant un 0 à la fin dans type C si nécessaire. Écrivons les parties des partitions marquantes sous la forme*

$$\begin{aligned}\nu &= [a_1 < b_1 < \cdots < a_k < b_k] \\ \nu' &= [c_1 < d_1 < \cdots < c_l < d_l].\end{aligned}$$

On a alors $\langle \nu \rangle \lambda \geq \langle \nu' \rangle \lambda$ si et seulement si, pour tout i , $1 \leq i \leq l$, il existe un j , $1 \leq j \leq k$, tel que

$$(2) \quad a_j \leq c_i < d_i \leq b_j.$$

Démonstration. Si ν et ν' vérifient la condition ci-dessus, il est facile de voir que $\langle \nu \rangle \lambda \geq \langle \nu' \rangle \lambda$ à partir des formules de [1], par la méthode de “division en blocs.” En particulier, la condition (2) implique qu’une division en blocs de $\langle \nu \rangle \lambda$ est toujours une division en blocs de $\langle \nu' \rangle \lambda$. La preuve se ramène, alors, au cas où $\langle \nu \rangle \lambda$ est un “bloc de base” : c’est-à-dire, ν n’a que deux parties, qui sont respectivement la plus grande partie marquable de λ et la plus petite partie de λ (qui est supposée marquable). Dans ce cas, une comparaison directe des formules de [1, Proposition 4.12] et celles pour d_S montre que l’on a toujours $d_S(\langle \nu \rangle \lambda) \leq d_S(\langle \nu' \rangle \lambda)$, et donc $\langle \nu \rangle \lambda \geq \langle \nu' \rangle \lambda$.

Pour l’autre implication, remarquons que si la condition (2) est satisfaite, toute partie de ν' de hauteur impaire a une hauteur généralisée impaire dans ν . D’autre part, toute partie de ν de hauteur paire a une hauteur généralisée paire dans ν . Par contre, si la condition (2) n’est pas satisfaite, alors il existe ou une partie de ν' de hauteur impaire dont la hauteur généralisée dans ν est paire, ou une partie de ν de hauteur paire dont la hauteur généralisée dans ν' est impaire. Choisissons une telle partie. Nous pouvons maintenant répéter le calcul qui est effectué au cours de la preuve du Theorem 5.1 de [1], en faisant jouer le rôle de a notre partie choisie. Ce calcul montre que $d_S(\langle \nu \rangle \lambda) \not\leq d_S(\langle \nu' \rangle \lambda)$. Nous en concluons que si (2) n’est pas satisfaite, alors $\langle \nu \rangle \lambda \not\geq \langle \nu' \rangle \lambda$. \square

3.2. Symboles et u -symboles. Nous allons employer certains objets combinatoires introduits par Lusztig pour paramétrer les représentations de W et les éléments de \mathcal{N}_G . Il s’agit des symboles [17] et des u -symboles [19], respectivement. À tout symbole ou u -symbole sont attachés un entier naturel et un entier relatif, appelés respectivement le *rang* et le *défaut* du symbole ou du u -symbole. Pour l’instant, nous restreignons notre attention aux u -symboles qui correspondent aux éléments de \mathcal{N}_G apparaissant dans la correspondance de Springer (non généralisée) : ce sont les u -symboles de défaut ≤ 1 . Les symboles et les u -symboles de défaut ≤ 1 sont certaines paires de listes d’entiers, de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{m+1} \\ b_1 & \cdots & b_m \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix}$$

types B et C type D

où $a_1 < a_2 < \cdots < a_{m+1}$, et $b_1 < \cdots < b_m$. Un symbole de défaut nul dont les deux lignes sont identiques sera dit *dégénéré*.

Deux symboles ou u -symboles dans lesquels les mêmes entiers ont lieu avec les mêmes multiplicités sont dits *semblables*. Un symbole ou un u -symbole est dit *distingué* si

$$a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq \cdots \leq a_m \leq b_m \leq a_{m+1}.$$

Il est évident que toute classe de similitude contient un unique élément distingué. Un symbole correspond à une représentation spéciale si et seulement s'il est distingué. Un u -symbole correspond à un couple $(\mathcal{O}, 1)$ si et seulement s'il est distingué.

Appelons le nombre m la *longueur* du symbole ou du u -symbole. Il y a une relation d'équivalence qui permet, pour tout symbole ou u -symbole de longueur m , de trouver un symbole ou u -symbole équivalent de longueur $m + 1$.

Dans le type B_n , soit $N = 2n + 1$; dans C_n ou D_n , soit $N = 2n$. Les classes unipotentes sont ainsi en correspondance avec un certain sous-ensemble de l'ensemble des partitions de N .

Nous décrivons maintenant le processus pour obtenir un symbole ou un u -symbole à partir d'une partition de N . Le nombre de parties de λ est pair dans le type D et impair dans le type B . Supposons ce nombre pair dans le type C , quitte à ajouter une partie égale à 0 si nécessaire. Soit m tel que le nombre de parties de λ est $2m$ (types C et D) ou $2m + 1$ (type B), et soit $\bar{\lambda}$ la partition définie par la formule $\bar{\lambda}_i = \lambda_i + (i - 1)$: c'est une partition de $N + m(2m - 1)$ (types C et D) ou $N + m(2m + 1)$ (type B).

Soit $\eta^* = (\eta_1^* < \cdots < \eta_m^*)$ la liste des parties paires de $\bar{\lambda}$ (on peut montrer par récurrence que η^* doit avoir m parties). Soit ξ^* la liste des parties impaires de $\bar{\lambda}$, avec un "1" supplémentaire ajouté au début de la liste dans le type C . Définissons deux partitions η et ξ telles que $2\eta_i = \eta_i^*$ et $2\xi_i + 1 = \xi_i^*$. Alors ξ a $m + 1$ parties dans les types B et C , et m parties dans le type D . Soient $\bar{\xi}$ et $\bar{\eta}$ les listes d'entiers définies par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Type } B : \quad \begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 + 1 & \cdots & \xi_m + (m - 1) & \xi_{m+1} + m \\ \eta_1 & \eta_2 + 1 & \cdots & \eta_m + (m - 1) \end{pmatrix} \\ \text{Type } C : \quad \begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 + 1 & \cdots & \xi_m + (m - 1) & \xi_{m+1} + m \\ \eta_1 + 1 & \eta_2 + 2 & \cdots & \eta_m + m \end{pmatrix} \\ \text{Type } D : \quad \begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 + 1 & \cdots & \xi_m + (m - 1) \\ \eta_1 & \eta_2 + 1 & \cdots & \eta_m + (m - 1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si λ est la partition qui correspond à la classe unipotente \mathcal{O} , alors $\begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}$ est le u -symbole qui correspond à $(\mathcal{O}, 1)$, et $\begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}$ est le symbole qui correspond à la représentation du groupe de Weyl associée à $(\mathcal{O}, 1)$.

Il peut arriver qu'une comparaison de deux symboles ou u -symboles implique une relation d'ordre entre les classes unipotentes associées. En particulier, remarquons que si λ et λ' sont deux partitions de N correspondant à deux classes unipotentes, alors $\lambda \leq \lambda'$ si et seulement si $\bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}'$. De plus, ces dernières partitions sont faciles à calculer à partir du symbole correspondant. Cette observation est utilisée au cours de la preuve du lemme suivant.

Lemme 3.2. *Soient $\begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \bar{\xi}' \\ \bar{\eta}' \end{pmatrix}$ des u -symboles de même longueur, et soient λ et λ' les partitions paramétrant les classes unipotentes auxquelles ils sont associés. Si $\bar{\xi} \cup \bar{\eta} \leq \bar{\xi}' \cup \bar{\eta}'$, alors $\lambda \leq \lambda'$, avec égalité si et seulement si $\begin{pmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}' \\ \bar{\eta}' \end{pmatrix}$.*

Démonstration. Nous pouvons supposer les u -symboles distingués, car les partitions $\bar{\xi} \cup \bar{\eta}$ et $\bar{\xi}' \cup \bar{\eta}'$ ne dépendent que de la classe de similitude des u -symboles. Ces u -symboles proviennent alors de deux symboles (ξ_η) et (ξ'_η) . D'après les commentaires ci-dessus, il suffit d'établir que $\bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}'$.

Nous pouvons supposer¹ que les symboles (ξ_η) et (ξ'_η) diffèrent aussi en deux parties au plus.

Notons les partitions $\xi \cup \eta$ et $\xi' \cup \eta'$ respectivement μ et μ' . Il existe donc deux indices $i_0 > i_1$ telles que $\mu_i = \mu'_i$ si $i \neq i_0, i_1$, mais $\mu_{i_0} = \mu'_{i_0} - C$ et $\mu_{i_1} = \mu'_{i_1} + C$, où C est un certain entier strictement positif. Cette description nous fournit une description analogue de la relation entre $\bar{\lambda}$ et $\bar{\lambda}'$. Soit $\bar{\lambda}'_{j_0}$ la partie de $\bar{\lambda}'$ qui correspond à μ'_{i_0} : c'est-à-dire, ou $\bar{\lambda}'_{j_0} = 2\mu'_{i_0} + 1$ ou $\bar{\lambda}'_{j_0} = 2\mu'_{i_0}$, suivant que μ'_{i_0} est membre de ξ' ou de η' . Soit $\bar{\lambda}'_{j_1}$ la partie analogue correspondant à μ'_{i_1} (il n'est pas forcément vrai que $i_0 = j_0$ ou $i_1 = j_1$). Alors $\bar{\lambda}$ est la partition obtenue à partir de $\bar{\lambda}'$ en remplaçant $\bar{\lambda}'_{j_0}$ et $\bar{\lambda}'_{j_1}$ par $\bar{\lambda}'_{j_0} - 2C$ et $\bar{\lambda}'_{j_1} + 2C$, respectivement. Remarquons, cependant, que ce n'est pas dire que $\bar{\lambda}_{j_0} = \bar{\lambda}'_{j_0} - 2C$. Après d'avoir remplacé ces deux parties de $\bar{\lambda}'$, il est possible que les parties de celle-ci ne soient plus en l'ordre décroissant. Donc il n'est pas tout de suite évident que $\bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}'$.

Nous savons que $\mu'_{i_0} - C \geq \mu'_{i_1} + C$. Si cette inégalité est stricte, alors on peut conclure que $\bar{\lambda}'_{j_0} - 2C \geq \bar{\lambda}'_{j_1} + 2C$. D'autre part, si la première inégalité est en réalité une égalité, alors il est possible que $\bar{\lambda}'_{j_0} - 2C = \bar{\lambda}'_{j_1} + 2C - 1$, dans le cas où μ'_{i_0} fait partie de η' et μ'_{i_1} fait partie de ξ' . Néanmoins, ces deux parties, considérées toutes seules comme partitions de $\bar{\lambda}'_{j_0} + \bar{\lambda}'_{j_1}$, satisfont toujours

$$[\bar{\lambda}'_{j_1} < \bar{\lambda}'_{j_0}] > [\bar{\lambda}'_{j_1} + 2C, \bar{\lambda}'_{j_0} - 2C]$$

(l'inégalité est stricte parce que C est supposé strictement positif). Toutes les autres parties de $\bar{\lambda}$ et de $\bar{\lambda}'$ sont égales, donc nous pouvons conclure que $\bar{\lambda} < \bar{\lambda}'$. \square

En vue du lemme 3.3, nous allons rappeler la description combinatoire de la correspondance de Springer en termes de symboles et de u -symboles. Les représentations irréductibles de W sont paramétrées par les paires ordonnées de partitions (α, β) de n si W est de type B_n ou C_n , et par les paires non ordonnées de partitions (α, β) de n , comptées deux fois lorsque α est égale à β , si W est de type D_n . L'application qui à la représentation paramétrée par (α, β) associe le symbole (ξ_η) défini par $\xi_i = \alpha_i + i - 1$ et $\eta_i = \beta_i + i - 1$, est une bijection de $\text{Irr}(W)$ sur l'ensemble des symboles de rang n et de défaut 1 (resp. 0, où les symboles dégénérés sont comptés deux fois) si W est de type B_n ou C_n (resp. D_n).

L'application de cet ensemble de symboles dans l'ensemble des u -symboles de rang N et de défaut 1 (resp. 0), qui au symbole (ξ_η) associe le u -symbole $(\bar{\xi}_\eta)$ est une bijection. La composée de ces deux applications est la correspondance de Springer.

Lemme 3.3. *Soient (α, β) et (α', β') deux paires de partitions, vues comme paramétrant des représentations de W , telles que $\alpha \leq \alpha'$ et $\beta \leq \beta'$. Soient (\mathcal{O}, π) et (\mathcal{O}', π') les éléments de \mathcal{N}_G auxquels elles sont associées par la correspondance de Springer.*

- (1) *On a $\mathcal{O} \leq \mathcal{O}'$, avec égalité seulement si $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$.*

¹le démontrer...

- (2) Soient \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}'_1 les classes spéciales auxquelles correspondent les cellules bilatères dont (α, β) et (α', β') font partie, respectivement. Alors $\mathcal{O}_1 \leq \mathcal{O}'_1$, avec égalité seulement si $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$.

Démonstration. Soient (ξ_η) , (ξ'_η) et $(\bar{\xi}_\eta)$, $(\bar{\xi}'_\eta)$ les symboles et les u -symboles qui correspondent à (α, β) et (α', β') , respectivement. Supposons que tous ces symboles et u -symboles ont même longueur.

Associons à (α, β) et (α', β') deux u -symboles $(\bar{\xi}_\eta)$ et $(\bar{\xi}'_\eta)$ de la même longueur. Grâce aux hypothèses sur (α, β) et (α', β') , il est clair que $\xi \cup \eta \leq \xi' \cup \eta'$. L'assertion (1) est alors conséquence immédiate du lemme 3.2.

Quant à l'assertion (2), remarquons d'abord qu'elle n'équivaut pas à l'assertion que l'unique classe spéciale dans la pièce spéciale de la classe \mathcal{O} correspondant à (α, β) est inférieure à la classe spéciale figurant dans la pièce spéciale de la classe \mathcal{O}' correspondant à (α', β') . La réciproque de la proposition 2.2 est fautive : il est possible que la classe spéciale \mathcal{O}_1 , correspondant à la cellule bilatère contenant la représentation de W associée à (α, β) , soit strictement plus grande que la classe spéciale figurant dans la pièce spéciale de \mathcal{O} .

La partie (2) découle d'un bref calcul en termes des symboles. Soient λ et λ' les partitions des classes \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}'_1 , et soient $\bar{\lambda}$ et $\bar{\lambda}'$ définies d'après la discussion qui précède le lemme 3.2. On a $\bar{\lambda} = \xi \cup \eta$ et $\bar{\lambda}' = \xi' \cup \eta'$. Il est évident, sous les hypothèses du lemme, que $\xi \leq \xi'$ et $\eta \leq \eta'$, et donc $\bar{\lambda} \leq \bar{\lambda}'$. Il est également clair que $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}'$ seulement si $\xi = \xi'$ et $\eta = \eta'$. \square

Lemme 3.4. Soit $n_1 = n/2$ si n est pair, et $n_1 = (n+1)/2$ si n est impair. Soit $n_2 = n - n_1$. Soient $(\alpha, \beta) = ([1^{n_1}], [1^{n_2}])$ et $(\alpha', \beta') = ([1^{n_1+k}], [1^{n_2-k}])$, où $-n_1 \leq k \leq n_2$. Alors les conclusions (1) et (2) du lemme 3.3 sont vraies.

Démonstration. Nous allons vérifier l'énoncé (1) du lemme précédent par un calcul explicite des u -symboles appropriés. Supposons pour l'instant que k est positif, et que le groupe W est de type B . Alors

$$\begin{pmatrix} \bar{\xi}' \\ \bar{\eta}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \cdots & l & l+3 & \cdots & 2m-1 & 2m+1 \\ 0 & 2 & \cdots & p & p+3 & \cdots & 2m-1 & \end{pmatrix},$$

où $l = 2(m - n_1 - k)$ et $p = 2(m - n_2 + k)$. La partition $\bar{\xi}' \cup \bar{\eta}'$ est donc de la forme

$$(0^2, 2^2, \dots, l^2, l+2, l+3, \dots, p-1, p, \\ (p+2)^2, (p+4)^2, \dots, 2(m-2)+1^2, 2(m-1)+1^2, 2m+1).$$

Remarquons que $p = l + 2(2k + n_1 - n_2)$. Il est évident, à partir de cette description, que la partition ci-dessus atteint la valeur la plus grande possible (à l'égard de l'ordre partiel sur les partitions) quand $k = 0$. Nous appliquons ensuite le lemme 3.2 pour obtenir le résultat requis.

Pour établir l'énoncé (2), on répète le calcul précédent en termes des symboles au lieu des u -symboles. De plus, il est également facile de traiter le cas où $k < 0$, ainsi que ceux de type C et D . \square

Le même argument que celui utilisé dans la preuve de [3, Proposition 4.1] permet de déduire le lemme suivant des assertions VIII.3.(2), 4.(3), 5.(1) et 5.(2) de [31].

Lemme 3.5. Soit L^* un pseudo sous-groupe de Levi de G^* de rang maximal, et soit $W' = W_1 \times W_2$ son groupe de Weyl, où W_1 et W_2 sont des facteurs simples de

type classique. Soient (α_1, β_1) et (α_2, β_2) deux paires de partitions paramétrant des représentations irréductibles de W_1 et W_2 respectivement. Alors toute composante irréductible qui intervient dans la représentation induite $\text{Ind}_{W'}^W(\alpha_1, \beta_1) \boxtimes (\alpha_2, \beta_2)$ est paramétrée par une paire (α, β) vérifiant

$$\alpha \leq \alpha_1 \vee \alpha_2 \quad \text{et} \quad \beta \leq \beta_1 \vee \beta_2.$$

De plus, il existe un terme dans la représentation induite pour lequel ces inégalités sont des égalités.

4. REPRÉSENTATIONS BIEN SUPPORTÉES

Via la correspondance de Springer, nous pouvons introduire la notion de *support* d'une représentation de W . Soit E une représentation de W . Si E irréductible et $\nu(E) = (\mathcal{O}, \pi)$, le support de E est la classe unipotente \mathcal{O} . Si E n'est pas irréductible, son support est la réunion des supports de ses composantes irréductibles. Les résultats de cette section sont fondés sur la notion suivante.

Définition 4.1. Une représentation E de W est dite *bien supportée* si son support $\text{supp } E$ vérifie les deux conditions suivantes :

- (1) Il existe une unique classe unipotente \mathcal{O}_0 telle que la représentation de Springer E_0 de \mathcal{O}_0 intervienne dans E , et $\mathcal{O}_0 \subset \text{supp } E \subset \overline{\mathcal{O}_0}$.
- (2) Tous les termes de E appartiennent à des cellules bilatères \mathbf{c}' qui satisfont $\mathbf{c}' \leq \mathbf{c}_0$, où \mathbf{c}_0 désigne la cellule qui contient E_0 .

De plus, E est dite *spécialement bien supportée* si la classe \mathcal{O}_0 est spéciale.

Une conséquence particulière de cette définition sera importante dans la suite. Pour le lemme suivant, nous conservons les notations de la définition précédente.

Lemme 4.2. Soit E' une composante irréductible de E , et supposons que $\nu(E') = (\mathcal{O}, \pi)$. Si \mathcal{O} appartient à la pièce spéciale de \mathcal{O}_0 , alors π est définie sur $\bar{A}(\mathcal{O})$.

Démonstration. Grâce à la condition (2), nous savons que $\nu^{-1}(\mathcal{O}, \pi)$ doit appartenir à \mathbf{c}_0 , car selon la proposition 2.2, les représentations dans une cellule plus petite ne peuvent pas être associées à une classe dans la pièce spéciale de \mathcal{O}_0 . Par conséquent, la \tilde{a} -valeur de $\nu^{-1}(\mathcal{O}, \pi)$ est égale à celle de E_0 . Le théorème 2.1 nous dit que cette dernière est égale à la \tilde{a} -valeur de la représentation de Springer de \mathcal{O} . On déduit que le noyau K de l'application $A(\mathcal{O}) \rightarrow \bar{A}(\mathcal{O})$ est contenu dans le noyau de π , et donc que π est définie sur $\bar{A}(\mathcal{O})$. \square

La proposition suivante relie le support d'une représentation induite et les ordres partiels sur les classes et sur les cellules.

Proposition 4.3. Soit W' le groupe de Weyl d'un pseudo sous-groupe de Levi de G^* . Soient \mathbf{c}' une cellule bilatère de W' et \mathcal{O}' la classe unipotente spéciale associée à \mathbf{c}' . Soit E' une représentation irréductible de W' appartenant à \mathbf{c}' . Soient \mathbf{c} et \mathcal{O} les induites de \mathbf{c}' et \mathcal{O}' , respectivement, et soit $E = \text{Ind}_{W'}^W E'$. On a alors :

- (1) $\text{supp } E \subset \overline{\mathcal{O}}$.
- (2) Toute composante irréductible de E appartient à une cellule bilatère \mathbf{c}_1 telle que $\mathbf{c}_1 \leq \mathbf{c}$.

La plupart de cette section est consacrée à la preuve de cette proposition. Nous l'établirons pour les groupes classiques par des méthodes combinatoires, et pour les groupes exceptionnels par des calculs explicites. Avant de commencer ce projet, cependant, nous verrons la conséquence la plus importante de cette proposition.

Théorème 4.4. *Soit L^* un pseudo sous-groupe de Levi de G^* , et soit W' le groupe de Weyl de L^* . Soit E' une représentation de W' , et soit $E = \text{Ind}_{W'}^W E'$. Si E' est spécialement bien supportée, alors E est bien supportée. De plus, lorsque L^* est un sous-groupe de Levi, la représentation E est spécialement bien supportée.*

Il est à noter que E' n'est pas supposée irréductible.

Démonstration. Soit \mathcal{O}' une classe maximale dans le support de E' , et soit \mathcal{O}_0 la classe induite de \mathcal{O}' . La proposition 4.3 nous dit que $\text{supp } E \subset \overline{\mathcal{O}_0}$. De plus, puisque la représentation de Springer de \mathcal{O}' intervient dans E' , celle de \mathcal{O}_0 intervient dans E , et par conséquent $\mathcal{O}_0 \subset \text{supp } E$. La condition (1) d'être bien supportée est donc satisfaite.

Soit \mathbf{c}' la cellule bilatère qui correspond à \mathcal{O}' , et soit \mathbf{c}_0 sa cellule induite dans W . L'énoncé (2) de la proposition 4.3, combiné avec le fait que l'induction des cellules bilatères respecte l'ordre partiel, implique la condition 2.

La représentation E est donc bien supportée. Si L est un sous-groupe de Levi, nous savons que la classe induite \mathcal{O}_0 est spéciale, et donc sous cette hypothèse E est spécialement bien supportée. \square

Nous revenons maintenant à la preuve de la proposition 4.3. Comme nous avons déjà remarqué, la démonstration dans le cas d'un groupe exceptionnel ne consiste qu'en des calculs explicites des représentation induites. Cependant, il n'est pas nécessaire de calculer l'induite de toute représentation de tout pseudo sous-groupe parabolique du groupe dual. La première moitié de l'argument ci-dessous, qui est de toute façon nécessaire pour les groupes classiques, permet aussi de diminuer le nombre de calculs explicites qu'il faut faire pour les groupes exceptionnels.

Démonstration de la proposition 4.3. Nous commençons par démontrer qu'il suffit de considérer les sous-groupes de Levi et pseudo sous-groupes de Levi maximaux de G^* (nous verrons au cours de cette démonstration la raison pour laquelle il ne suffirait pas de considérer les seuls pseudo sous-groupes de Levi maximaux). Si L^* n'est pas un tel sous-groupe maximal, soit M^* un pseudo sous-groupe de Levi de G^* tel que L^* soit un sous-groupe de Levi de M^* , et soit W'' son groupe de Weyl. Soit M le groupe dual de M^* . (Il est possible que M ne soit isomorphe à aucun sous-groupe de G). Supposons la proposition déjà établie pour L^* en tant que pseudo sous-groupe de Levi de M^* , ainsi que pour M^* comme pseudo sous-groupe de Levi de G^* . Écrivons la représentation induite de E' comme somme d'un nombre fini de représentations irréductibles de W'' :

$$\text{Ind}_{W'}^{W''} E' = \sum m_i F_i,$$

où les m_i sont des entiers positifs. Soit \mathbf{d}_i la cellule bilatère de W'' à laquelle appartient F_i , et soit \mathcal{O}_i'' la classe unipotente spéciale de M^* à laquelle correspond \mathbf{d}_i . En particulier, supposons les étiquettes i choisies de telle sorte que \mathbf{d}_1 soit la cellule induite de \mathbf{c}' . Il est important de remarquer ici que \mathcal{O}_1'' est la classe induite de \mathcal{O}' , puisque L^* est un sous-groupe de Levi de M^* . On sait que $\text{Ind}_{M^*}^G \mathcal{O}_1'' = \mathcal{O}$, ainsi que $\text{Ind}_{W''}^W \mathbf{d}_1 = \mathbf{c}$.

Pour tout i , nous savons que $\text{supp Ind}_{W''}^W F_i \subset \overline{\text{Ind}_{M^*}^G \mathcal{O}_i''} \subset \overline{\mathcal{O}}$, où la deuxième inclusion est conséquence du fait que l'induction est une application croissante. L'énoncé (1) est ainsi établi. Les cellules \mathbf{c}_1 auxquelles appartiennent les termes de $\text{Ind}_{W''}^W F_i$ satisfont $\mathbf{c}_1 \leq \text{Ind}_{W''}^W \mathbf{d}_i$, mais puisque l'induction des cellules est aussi croissante, le fait que $\mathbf{d}_i \leq \mathbf{d}_1$ implique que $\text{Ind}_{W''}^W \mathbf{d}_i \leq \mathbf{c}$. L'énoncé (2) est donc également établi.

Dorénavant, nous supposons que L^* est soit un sous-groupe de Levi maximal soit un pseudo sous-groupe de Levi maximal. Si G est simple et de type exceptionnel, il faut simplement calculer les induites de toutes les représentations irréductibles de tous les tels sous-groupes maximaux. Les auteurs ont effectué ces calculs à l'aide du logiciel CHEVIE [12]. Nous ne donnons pas de détails de ces calculs.

Considérons maintenant le cas où G est simple et de type classique. Les sous-groupes de Levi et les pseudo sous-groupes de Levi maximaux de G^* ont les formes suivantes :

	sous-groupes de Levi	pseudo sous-groupes de Levi
Type B :	$A_{k-1} \times C_{n-k}$	$C_k \times C_{n-k}$
Type C :	$A_{k-1} \times B_{n-k}$	$D_k \times B_{n-k}$
Type D :	$A_{k-1} \times D_{n-k}$	$D_k \times D_{n-k}$

Nous pouvons en fait faire une réduction supplémentaire : dans le type B , par exemple, on peut faire l'induction d'un sous-groupe de Levi maximal en deux étapes, d'abord de $A_{k-1} \times C_{n-k}$ à $C_k \times C_{n-k}$, et puis de ce dernier pseudo sous-groupe de Levi à B_n . Il suffit donc de traiter les sous-groupes de Levi maximaux de la forme A_{n-1} . De plus, il est seulement nécessaire de considérer les représentations de W' qui ne résultent pas de l'induction tronquée d'une représentation d'un sous-groupe parabolique propre.

Pour le groupe de Weyl W' de type A_{n-1} , la seule représentation qui n'est pas induite de cette façon est la représentation signe, laquelle correspond à la partition $[1^n]$. Nous savons que la multiplicité de la représentation correspondant à (α, β) dans $\text{Ind}_{W'}^W [1^n]$ est donnée par le coefficient de Littlewood-Richardson $c_{\alpha\beta}^{[1^n]}$. Ce dernier s'annule si (α, β) n'est pas de la forme $([1^p], [1^{n-p}])$. Les deux conclusions du lemme 3.4, traduites dans le langage des classes et des cellules, deviennent les deux parties de la présente proposition.

Pour les pseudo sous-groupes de Levi maximaux, il n'est pas avantageux d'exclure les représentations induites de notre discussion. Nous employons le lemme 3.5 énoncé ci-dessous. Ce lemme dit précisément ce qui est nécessaire pour appliquer le lemme 3.3, lequel implique ensuite la présente proposition. \square

5. REPRÉSENTATIONS ET CLASSES DE CONJUGAISON DE $A(\mathcal{O})$

Soit $\tilde{\mathcal{N}}_G$ l'ensemble des couples (\mathcal{O}, π) où \mathcal{O} est une classe unipotente et π est une représentation irréductible de $\tilde{A}(\mathcal{O})$. Dans [1] a été introduit un ordre partiel naturel sur $\tilde{\mathcal{N}}_G$. Dans cette section nous traduisons l'ordre partiel introduit en [1], en un ordre partiel sur $\tilde{\mathcal{N}}_G$, dans le but de comprendre la propriété d'être bien supportée en termes de cet ordre partiel. En [11], Geck a établi une suite de propriétés des faisceaux caractères associés à des représentations induites vérifiant une condition particulière à l'égard de l'ordre partiel usuel sur l'ensemble des classes unipotentes. La compréhension de la relation entre l'ordre partiel sur $\tilde{\mathcal{N}}_G$ et la

propriété d'être bien supporté devrait permettre d'étendre ces résultats de Geck au cas où sa condition n'est pas satisfaite.

Nous allons étudier les groupes $\bar{A}(\mathcal{O})$ comme groupes de Coxeter, d'après des idées de [25] et de [2]. Chacun des groupes $\bar{A}(\mathcal{O})$ est soit un produit de plusieurs exemplaires de S_2 soit l'un des groupes S_3 , S_4 , ou S_5 . Donc de tels groupes sont tous des groupes de Weyl de type A . Pour la discussion suivante, H désignera un produit quelconque de groupes de Weyl de type A . Supposons choisi un ensemble Π de réflexions simples pour H . On peut associer à tout sous-ensemble P de Π le sous-groupe H_P de H engendré par les éléments de P . Puisque tous ces groupes sont des produits de certains groupes symétriques, il est facile d'établir la proposition suivante.

Proposition 5.1. *Il y a une bijection entre l'ensemble $\text{Irr}(H)$ des représentations irréductibles de H et l'ensemble des sous-ensembles de Π à conjugaison près, donnée par*

$$\pi \rightsquigarrow P \quad \text{si} \quad \pi \simeq \epsilon \otimes j_{H_P}^H \epsilon,$$

où j désigne l'induction tronquée et ϵ est la représentation signe.

(La raison pour laquelle nous tensorisons la représentation induite avec la représentation signe est que plus tard, nous préférons que la représentation triviale soit la plus grande dans l'ordre partiel. Si nous ne tensorisons pas ici, la représentation signe serait la plus grande.)

Nous décrivons ensuite une recette pour associer une classe de conjugaison dans H à tout sous-ensemble P de Π : si $P = \{s_1, \dots, s_k\}$, notons C_P la classe de conjugaison de l'élément $s_1 \cdots s_k \in H$. Ce dernier élément dépend, bien sûr, sur l'ordre dans lequel nous avons écrit les éléments de P , mais grâce au fait que H est un produit de certains groupes symétriques, il est facile de démontrer que la classe C_P n'en dépend pas. (On commence par se souvenir que les classes de conjugaison dans S_n sont paramétrées par les partitions de n , de sorte que les parties d'une partition donnent les longueurs des cycles faisant partie d'un élément de la classe. Ensuite on remarque que cette partition peut être calculée d'après une liste non ordonnée de réflexions simples).

Il est évident que si P et Q sont deux sous-ensembles de Π , alors les classes C_P et C_Q sont égales si et seulement si P et Q sont conjuguées. Donc la recette ci-dessus nous donne également une façon d'associer une classe de conjugaison à toute représentation.

Proposition 5.2. *L'application $\pi \mapsto P \mapsto C_P$ est une bijection entre $\text{Irr}(H)$ et l'ensemble $\text{Cl}(H)$ des classes de conjugaison de H .*

Pourtant, cette application n'est pas du tout canonique : elle dépend sur le choix des réflexions simples. Néanmoins, nous pourrions résoudre ce problème en utilisant l'ordre partiel sur \mathcal{N}'_G pour obtenir un ensemble canonique de réflexions simples. Rappelons que l'ensemble $\text{Cl}(\bar{A}(\mathcal{O}))$ hérite d'un ordre partiel de \mathcal{N}'_G de sorte que la classe triviale soit l'unique élément minimal. Appelons une classe C *superminimale* si elle a la propriété que $C > C'$ implique que C' est triviale : les classes superminimales sont les classes aussi petites que possible sans être triviales. Le choix des réflexions simples dans [2] consiste précisément en des représentants de classes de conjugaison superminimales.

Le résultat suivant a été obtenu de manière indépendante par Sommers [29].

Proposition 5.3. *Il existe un ensemble $\Sigma \subset \bar{A}(\mathcal{O})$ d'involutions, unique modulo conjugaison, tel que*

- (1) *tout élément de Σ appartient à une classe de conjugaison superminimale ;*
- (2) *toute classe de conjugaison superminimale possède au moins un représentant dans Σ ;*
- (3) *Σ constitue un ensemble de réflexions simples pour la présentation de $\bar{A}(\mathcal{O})$ comme groupe de Coxeter.*

Démonstration pour les groupes exceptionnels. Si \mathcal{O} est une classe unipotente dans une groupe exceptionnel avec $A(\mathcal{O})$ non trivial, on a toujours que $\bar{A}(\mathcal{O}) \simeq S_n$ avec $2 \leq n \leq 5$. Un coup d'œil sur les tables de [1] montre qu'il y a toujours une unique classe superminimale, dans laquelle se trouvent toutes les réflexions du groupe. Il est donc évident que l'on peut choisir un ensemble de réflexions simples de sorte que les conditions ci-dessus soient satisfaites. \square

Démonstration pour les groupes classiques. Dans ce cas, le groupe $\bar{A}(\mathcal{O})$ est toujours un produit de plusieurs exemplaires de S_2 , donc tout élément est une réflexion. Puisque le groupe est abélien, toute classe de conjugaison ne contient qu'un seul élément. Donc il suffit simplement de vérifier que les éléments superminimaux constituent un ensemble de réflexions simples. Si $a_1 < \dots < a_k$ sont les parties marquables d'une partition λ , la proposition 3.1 implique que les classes superminimales sont

$$\langle [a_1, a_2] \rangle_\lambda, \langle [a_2, a_3] \rangle_\lambda, \dots, \langle [a_{k-1}, a_k] \rangle_\lambda \quad (\text{ainsi que } \langle [a_1] \rangle_\lambda \text{ dans type } C).$$

D'après [19], on sait regarder $A(\mathcal{O})$ comme sous-quotient d'un S_2 -module libre engendré par k générateurs. On en déduit que les éléments cités ci-dessus engendrent $\bar{A}(\mathcal{O})$, et que leur nombre est égal au rang de $\bar{A}(\mathcal{O})$ comme S_2 -module. Par conséquent, nous avons trouvé un ensemble Σ satisfaisant aux conditions de la proposition. \square

Les propositions 5.2 et 5.3 combinées nous fournissent une bijection naturelle $\mathcal{N}_G \leftrightarrow \mathcal{N}'_G$. Enfin la relation promise au début de la section est précisé dans le théorème suivant. À partir de la Définition 4.1, ce théorème est presque trivial, mais son énoncé aide peut-être à éclaircir ce que signifie d'être ien supporté.

Théorème 5.4. *Les termes d'une représentation bien supportée d'un groupe de Weyl W appartenant à la cellule bilatère la plus haute correspondent tous à des éléments de \mathcal{N}_G . De plus, parmi les termes qui sont associés à l'unique classe maximale dans le support, il y a un unique terme maximal à l'égard de l'ordre partiel naturel sur \mathcal{N}_G .*

Démonstration. Le premier énoncé équivaut au lemme 4.2. Le deuxième énoncé est conséquence du fait que la représentation de Springer de l'unique classe maximale \mathcal{O}_0 dans le support (qui a toujours lieu dans une représentation bien supportée) correspond à la représentation triviale de $\bar{A}(\mathcal{O}_0)$, qui est toujours maximale dans l'ordre partiel sur $\text{Cl}(\bar{A}(\mathcal{O}_0))$. \square

6. SUPPORTS UNIPOTENTS DES MOYENNES DE CARACTÈRES

6.1. Caractères et caractères fantômes. Le groupe dual G^* hérite d'une structure \mathbb{F}_q -rationnelle et nous notons encore F l'endomorphisme de Frobenius associé

à celle-ci. Nous supposons que le tore T est F -stable et contenu dans un sous-groupe de Borel F -stable B . Nous notons encore F l'automorphisme de W induit par le Frobenius. Nous supposons, comme il est licite de le faire, que les groupes B^* et T^* sont F -stables, [8].

Il existe une partition de l'ensemble des caractères irréductibles de G^F en sous-ensembles $\mathcal{E}(G^F)_s$, appelés *séries de Lusztig*, paramétrés par les classes de conjugaison semi-simples F -stables dans G^* . Pour simplifier l'exposition, nous supposons dans cette sous-section que le groupe G a un centre connexe. Le groupe $C_{G^*}(s)$ est alors connexe; nous désignons par W_s son groupe de Weyl, par Φ_s le système de racines associé, par Φ_s^+ l'ensemble des racines positives de Φ_s , et posons

$$W_F(s) := \{w \in W : {}^w F s = s\}.$$

Nous choisissons un élément w_1 de $W_F(s)$ tel que ${}^{w_1 F} \Phi_s^+ = \Phi_s^+$. Soit γ l'automorphisme de W_s induit par $w_1 F$, *i.e.*, l'automorphisme défini par la formule [18, (2.15.1)]. Soit $(\text{Irr } W_s)_{\text{ét}}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de représentations irréductibles de W_s qui admettent une extension au groupe $W_s \rtimes \langle \gamma \rangle$.

Soit G_{uni} la variété unipotente de G . Pour tout $E_1 \in (\text{Irr } W_s)_{\text{ét}}$, nous notons \tilde{E}_1 une extension de E_1 à $W_s \rtimes \langle \gamma \rangle$ et nous définissons, comme en [18, (3.7.1)], la combinaison linéaire rationnelle suivante de caractères de Deligne-Lusztig de G :

$$(3) \quad R_s(\tilde{E}_1) := \frac{1}{|W_s|} \sum_{w \in W_s} \text{Tr}(w\gamma, \tilde{E}_1) R_{T_{ww_1}}^G(\theta_{ww_1}),$$

où T_{ww_1} désigne le tore F -stable obtenu à partir de T par torsion par $ww_1 v$ et θ_{ww_1} est un caractère irréductible de $T_{ww_1}^F$ correspondant à $s \in G^*$. Il s'ensuit immédiatement que

$$(4) \quad R_{T_{ww_1}}^G(\theta_{ww_1}) = \sum_{E_1 \in (\text{Irr}(W_s))_{\text{ét}}} \text{Tr}(w\gamma, \tilde{E}_1) R_s(\tilde{E}_1).$$

Lemme 6.1. *Soit $E_1 \in \text{Irr}(W_s)_{\text{ét}}$. On a*

$$R_s(\tilde{E}_1)|_{G_{\text{uni}}^F} = \sum_{E \in (\text{Irr}(W))_{\text{ét}}} \langle \text{Tr}(\tilde{E}_1), \text{Tr}(\tilde{E})|_{W_s \cdot \gamma} \rangle_{W_s \cdot \gamma} R_1(\tilde{E})|_{G_{\text{uni}}^F},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W_s \cdot \gamma}$ est défini par (1).

Démonstration. On a (voir par exemple [7, Corollary 7.2.9])

$$R_{T_{ww_1}}^G(\theta_{ww_1})|_{G_{\text{uni}}^F} = R_{T_{ww_1}}^G(1)|_{G_{\text{uni}}^F}.$$

D'autre part, la formule (4) donne dans le cas $s = 1$:

$$R_{T_v}^G(\theta_v) = \sum_{E \in (\text{Irr}(W))_{\text{ét}}} \text{Tr}(vF, \tilde{E}) R_1(\tilde{E}), \quad \text{pour tout } v \in W.$$

Il résulte alors de (3) et de l'équation ci-dessus (appliquée avec $v = ww_1$) que

$$\begin{aligned} R_s(\tilde{E}_1)|_{G_{\text{uni}}^F} &= \frac{1}{|W_s|} \sum_{w \in W_s} \text{Tr}(w\gamma, \tilde{E}_1) \sum_{E \in (\text{Irr}(W))_{\text{ét}}} \text{Tr}(ww_1 F, \tilde{E}) R_1(\tilde{E})|_{G_{\text{uni}}^F} \\ &= \sum_{E \in (\text{Irr}(W))_{\text{ét}}} \left(\frac{1}{|W_s|} \sum_{w \in W_s} \text{Tr}(w\gamma, \tilde{E}_1) \text{Tr}(w\gamma, \tilde{E}) \right) R_1(\tilde{E})|_{G_{\text{uni}}^F}. \end{aligned}$$

□

Lemme 6.2. *Soient $E \in \text{Irr}(W)_{\text{ét}}$ et $E_1 \in \text{Irr}(W_s)_{\text{ét}}$. Si $\langle \tilde{E}_1, \tilde{E} |_{W_s \cdot \gamma} \rangle_{W_s \cdot \gamma} \neq 0$ alors $\langle E_1, E |_{W_s} \rangle_{W_s} \neq 0$.*

Démonstration. □

Soient $X(W_s, \gamma)$ et $\bar{X}(W_s, \gamma)$ les ensembles définis en [18, (4.21.11)] et [18, (4.21.12)] respectivement, et $\{ \cdot, \cdot \}: \bar{X}(W_s, \gamma) \times X(W_s, \gamma) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell$ l'accouplement canonique défini en [18, (4.21.13)]. D'après [18, (4.21.14)], $(\text{Irr } W_s)_{\text{ét}}$ se plonge dans $X(W_s, \gamma)$. Nous noterons $x_{\tilde{E}_1}$ l'image de \tilde{E}_1 par ce plongement. Lusztig a démontré en [18, Theorem 4.23] que la série $\mathcal{E}(G^F)_s$ est en bijection avec $\bar{X}(W_s, \gamma)$ et que

$$(5) \quad \langle \rho, R_s(\tilde{E}_1) \rangle_{G^F} = (-1)^{\ell(w_1)} \Delta(\bar{x}_\rho) \{ \bar{x}_\rho, x_{\tilde{E}_1} \},$$

où \bar{x}_ρ désigne l'élément de $\bar{X}(W_s, \gamma)$ correspondant à ρ et $\Delta: \bar{X}(W_s, \gamma) \rightarrow \{\pm 1\}$ est la fonction définie en [18, (4.20)] (la fonction Δ ne prend la valeur -1 que dans quelques cas où W_s est de type E_7 ou E_8). D'autre part, d'après [18, Corollary 4.24]

$$R_s(\tilde{E}_1) = \sum_{y \in \bar{X}(W_s, \gamma)} \{x, y\} \Delta(y) \rho_y,$$

où ρ_y est l'élément de $\mathcal{E}(G^F)_s$ paramétré par $y \in \bar{X}(W_s, \gamma)$.

Soit \mathbf{c} une cellule bilatère dans W_s . Il résulte de [18, (4.23) et (6.17)] que la paire (s, \mathbf{c}) définit un sous-ensemble $\mathcal{E}(G^F)_{s, \mathbf{c}}$ de $\mathcal{E}(G^F)_s$ tel que si $\rho \in \mathcal{E}(G^F)_{s, \mathbf{c}}$ et $E_1 \in (\text{Irr } W_s)_{\text{ét}}$, $\langle \rho, R_s(\tilde{E}_1) \rangle_{G^F}$ soit non nul si $E_1 \in \mathbf{c}$ et nul sinon.

Nous associons une classe unipotente $\mathcal{O}_{s, \mathbf{c}}$ à l'ensemble $\mathcal{E}(G^F)_{s, \mathbf{c}}$ de W_s qui appartient à \mathbf{c} , d'après le théorème 4.4, la représentation induite $E = \text{Ind}_{W_s}^W(E_1)$ est bien supportée et $\mathcal{O}_{s, \mathbf{c}}$ est définie comme étant l'unique classe maximale dans le support de E . La preuve du théorème 4.4 montre que la classe $\mathcal{O}_{s, \mathbf{c}}$ est la classe induite de la classe associée à E_1 par la correspondance de Springer, il s'ensuit que $\mathcal{O}_{s, \mathbf{c}}$ est égale à la classe unipotente attaché à $\mathcal{E}(G^F)_{s, \mathbf{c}}$ par Lusztig en [18, (13.3)].

6.2. Valeurs moyennes de caractères. Dans cette sous-section et la suivante, nous n'imposons pas de condition sur p (*i.e.*, le cas p mauvais est permis). Nous allons voir dans cette sous-section que tout élément de $\mathcal{E}(G^F)_{s, \mathbf{c}}$ est de restriction non identiquement nulle à $\mathcal{O}_{s, \mathbf{c}}$.

Nous définissons la *valeur moyenne* $\text{vm}(f, \mathcal{O})$ et la *valeur moyenne pondérée* $\text{vmp}(f, \mathcal{O})$, sur les points \mathbb{F}_q -rationnels d'une classe unipotente F -stable \mathcal{O} , d'une fonction centrale f sur G^F , de la manière suivante : notons u_1, u_2, \dots, u_r des représentants dans \mathcal{O}^F des classes de G^F -conjugaison contenues dans \mathcal{O}^F , alors

$$(6) \quad \text{vm}(f, \mathcal{O}) := \sum_{i=1}^r [G^F : C_G(u_i)^F] f(u_i) = \sum_{u \in \mathcal{O}(\mathbb{F}_q)} f(u),$$

$$(7) \quad \text{vmp}(f, \mathcal{O}) := \sum_{i=1}^r [A(u_i) : A(u_i)^F] f(u_i).$$

En 1980, Lusztig a conjecturé dans [16] qu'étant donné un caractère irréductible ρ de G^F , il existait une unique classe unipotente F -stable \mathcal{O}_ρ^L de G telle que $\text{vm}(\rho, \mathcal{O}_\rho^L) \neq 0$ et qui soit de dimension maximale pour cette propriété. Sous l'hypothèse que q est une puissance assez grande d'un nombre premier p assez grand, Lusztig a démontré en [23, Th. 11.2] la propriété analogue pour $\text{vmp}(\rho, \mathcal{O}_\rho^L)$. En

utilisant [23], Geck a étendu en [10, Th. 1.4] le résultat de Lusztig au cas où q est une puissance arbitraire d'un nombre premier p bon pour G , et a, sous l'hypothèse p bon, démontré la conjecture de Lusztig et l'égalité des classes unipotentes \mathcal{O}_ρ^L et \mathcal{O}'_ρ^L , puis Geck et Malle ont étendu le résultat de Lusztig en toute caractéristique et démontré en [13, Theorem 3.7] que, si le caractère ρ appartient à $\mathcal{E}(G^F)_{s,\mathbf{c}}$, alors \mathcal{O}_ρ^L est la classe $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$.

La définition de $\text{vmp}(\rho, \mathcal{O})$ montre d'autre part que si la restriction de la valeur moyenne pondérée d'un caractère à une classe unipotente est non nulle, alors la restriction du caractère lui-même à cette classe est aussi non nulle. Par conséquent, la restriction de ρ à la classe $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$ n'est pas identiquement nulle.

Remarque 6.3. Dans le cas où G est un groupe simple de type G_2 , où p est égal à 3 (donc mauvais pour G) et où \mathcal{O} est la classe des éléments unipotents réguliers, il existe des caractères unipotents de G^F dont la restriction à \mathcal{O}^F est non identiquement nulle alors que leur valeur moyenne sur \mathcal{O}^F est identiquement nulle (voir [9]). Nous démontrerons au corollaire 6.7 que ce type de contre-exemple n'existe pas si p est grand, *i.e.*, si p est grand, alors la restriction à \mathcal{O}^F d'un caractère irréductible de G^F est identiquement nulle si et seulement sa valeur moyenne est identiquement nulle.

6.3. Supports. Le résultat suivant est prouvé dans [13, Proposition 4.3] pour les caractères unipotents. Nous l'étendons ici à tous les caractères irréductibles.

Théorème 6.4. *Soit ρ un caractère irréductible de G^F . Toute classe unipotente F -stable \mathcal{O} telle que $\text{vmp}(\rho, \mathcal{O}) \neq 0$ (resp. $\text{vm}(\rho, \mathcal{O}) \neq 0$) est contenue dans l'adhérence de Zariski de $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$.*

Démonstration. Soit $V(\rho, \mathcal{O})$ l'un ou l'autre des termes $\text{vmp}(\rho, \mathcal{O})$ ou $\text{vm}(\rho, \mathcal{O})$. Nous commençons par nous ramener au cas où le centre du groupe G est connexe. Pour cela, nous fixons un plongement régulier (voir [18, chap. 14] ou [22]) de G dans un groupe G_0 à centre connexe de même groupe dérivé que G et un caractère irréductible ρ_0 de G_0^F tel que ρ intervienne dans la restriction de ρ_0 à G^F . Notons $m_\rho (\geq 1)$ le nombre de caractères irréductibles de G^F qui apparaissent dans la restriction de ρ_0 à G_0^F (ce nombre est indépendant du choix de ρ_0). On a alors (voir [13, preuve du Theorem 3.7])

$$|A_{G_0}(\mathcal{O})| V(\mathcal{O}, \rho_0) = m_\rho |A_G(\mathcal{O})| V(\mathcal{O}, \rho).$$

Il suffit donc de prouver le théorème pour G_0 . Nous supposons désormais que le centre de G est connexe.

Soit (s, \mathbf{c}) tel que $\rho \in \mathcal{E}(G^F)_{s,\mathbf{c}}$. D'après 4), la projection uniforme ρ_{unif} de ρ (*i.e.*, la projection de ρ sur l'espace des combinaisons linéaires de caractères de Deligne-Lusztig) est combinaison linéaire de caractères fantômes $R_s(\tilde{E}_1)$ tels que E_1 appartienne à \mathbf{c} :

$$\rho_{\text{unif}} = \sum_{E_1 \in \mathbf{c} \cap (\text{Irr } W_s)_{\text{ét}}} c(\rho, E_1) R_s(\tilde{E}_1).$$

La valeur moyenne (pondérée) $V(\mathcal{O}, \rho)$ étant, d'après [10, Proposition 1.3], égale au produit scalaire de ρ par une fonction uniforme (*i.e.*, combinaison linéaire de caractères de Deligne-Lusztig), on a $V(\mathcal{O}, \rho) = V(\mathcal{O}, \rho_{\text{unif}})$. Par conséquent,

$$V(\mathcal{O}, \rho) = \sum_{E_1 \in \mathbf{c} \cap (\text{Irr } W_s)_{\text{ét}}} c(\rho, E_1) V(\mathcal{O}, R_s(\tilde{E}_1)).$$

Soit \mathbf{c}_1 la cellule bilatère de W induite de \mathbf{c} . En utilisant les lemmes 6.1, 6.2 et la proposition 4.3, nous voyons que $V(\mathcal{O}, \rho)$ est combinaison linéaire de valeurs moyennes (pondérées) $V(\mathcal{O}, R_1(\tilde{E}))$, où E appartient à une cellule bilatère \mathbf{c}' telle que $\mathbf{c}' \leq \mathbf{c}_1$ et il suffit alors de raisonner comme dans la démonstration de [13, Proposition 4.3]. \square

6.4. Application au support des caractères. Nous supposons dans cette sous-section que p et q sont suffisamment grands pour que les résultats de [23] soient applicables.

L'endomorphisme de Frobenius agit de manière naturelle sur \mathcal{N}_G et nous notons \mathcal{N}_G^F le sous-ensemble de \mathcal{N}_G formé des éléments $\iota = (\mathcal{O}, \pi) \in \mathcal{N}_G$ qui sont F -stables. Puisque la représentation π de $A(\mathcal{O})$ est invariante sous l'action de F , elle s'étend en une représentation $\tilde{\pi}$ du produit semi-direct $A(\mathcal{O}) \rtimes \langle F \rangle$ de $A(\mathcal{O})$ par le groupe cyclique d'automorphismes engendré par F . Pour tout élément a de $A(\mathcal{O})$, nous notons u_a l'élément de \mathcal{O}^F obtenu par torsion par a d'un représentant de u . Nous posons

$$(8) \quad Y_\iota(g) = \begin{cases} \text{Tr}(Fa, \tilde{\pi}) & \text{s'il existe } a \in A(\mathcal{O}) \text{ tel que } g = u_a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction Y_ι dépend du choix de l'extension $\tilde{\pi}$. Lorsque π est la représentation triviale de $A(\mathcal{O})$ (notée 1), nous normalisons $Y_\iota = Y_{(\mathcal{O}, 1)}$ de manière à ce qu'elle soit constante et égale à 1 sur \mathcal{O}^F . Les fonctions Y_ι , pour $\iota \in \mathcal{N}_G^F$, forment une base de l'espace des fonctions centrales de G^F à support sur \mathcal{O}^F .

Soient u_1, \dots, u_r des représentants dans \mathcal{O}^F des classes de G^F -conjugaison contenues dans \mathcal{O} . Pour $i = 1, \dots, r$, nous notons Γ_{u_i} le caractère de Gelfand-Graev généralisé associé (voir par exemple [14, §2.2]) et $A(u_i)^F$ le groupe des points de $A(u_i)$ fixés par F . Remarquons que l'ordre de $A(u_i)$ ne dépend pas de i . Pour tout $\iota \in \mathcal{N}_G^F$ de la forme $\iota = (\mathcal{O}, \pi)$, nous posons

$$(9) \quad \Gamma_\iota = \sum_{i=1}^r [A(u_i) : A(u_i)^F] Y_\iota(u_i) \Gamma_{u_i}.$$

En particulier,

$$(10) \quad \Gamma_{(\mathcal{O}, 1)} = \sum_{i=1}^r [A(u_i) : A(u_i)^F] \Gamma_{u_i}.$$

Proposition 6.5. *Nous supposons que p et q sont suffisamment grands pour que les résultats de [23] soient applicables. Soient ρ un caractère irréductible de G^F et \mathcal{O} une classe unipotente F -stable de G telle qu'il existe $u \in \mathcal{O}^F$ tel que $\text{Tr}(u, \rho) \neq 0$.*

Alors $\text{vmp}(\mathcal{O}, \rho) \neq 0$.

Remarque 6.6. Ce résultat sera utilisé dans la preuve du théorème 7.5. Nous verrons au théorème 8.1 qu'il reste vrai sous l'hypothèse plus faible que p est bon pour G .

Démonstration. L'argument que nous allons utiliser est inspiré de celui employé dans les démonstrations de [23, Th. 11.2 (iv)] et [11, (2.7) (b)].

D'après [11, (2.7) (b)], on a $\dim \mathcal{O} \leq \dim \mathcal{O}_{s,c}$ avec égalité uniquement si $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{s,c}$. Nous considérons l'ensemble des classes unipotentes F -stables de G dont l'adhérence de Zariski contient la classe \mathcal{O} et sur lesquelles ρ n'est pas identiquement nul (ces classes sont donc toutes de dimension inférieure à $\dim \mathcal{O}_{s,c}$). Soit

\mathcal{O}' un élément maximal de cet ensemble (l'existence d'un telle classe \mathcal{O}' est assurée par exemple par la finitude du nombre de classes unipotentes de G , voir [15]).

Soit \mathcal{O}'' une classe unipotente F -stable de G , distincte de \mathcal{O}' et telle que $\mathcal{O}' \subset \overline{\mathcal{O}''}$. On a donc $\mathcal{O} \subset \overline{\mathcal{O}''}$ et la maximalité de \mathcal{O}' implique que $\rho(u'') = 0$ pour tout $u'' \in (\mathcal{O}'')^F$, i.e., la classe \mathcal{O}' possède satisfait à la condition (*) de [11, Lem. 2.5] :

$$\rho(u'') = 0 \quad \text{pour tout } u'' \in G_{\text{uni}}^F \text{ tel que } \mathcal{O}' < (u'').$$

Puisque p et q sont grands, il résulte alors de [11, Cor. 2.6] qu'il existe un couple l' dans \mathcal{N}_G^F de la forme (\mathcal{O}', π') tel que le produit scalaire $\langle \rho, D_G(\Gamma_{l'}) \rangle_{G^F}$ soit non nul, où D_G est la dualité de Curtis-Alvis-Kawanaka (voir par exemple [7, § 8.2]). Notons $u'_1, u'_2, \dots, u'_{r'}$ des représentants dans $(\mathcal{O}')^F$ des classes de G^F -conjugaison contenues dans $(\mathcal{O}')^F$. La définition (9) montre alors qu'il existe $i \in \{1, \dots, r'\}$ tel que $\langle \rho, D_G(\Gamma_{u'_i}) \rangle_{G^F} \neq 0$. L'opérateur D_G étant autoadjoint pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{G^F}$, on a $\langle D_G(\rho), \Gamma_{u'_i} \rangle_{G^F} = \langle \rho, D_G(\Gamma_{u'_i}) \rangle_{G^F} \neq 0$. Comme $\pm D_G(\rho)$ est un caractère irréductible et que, d'après (10), $\Gamma_{(\mathcal{O}', 1)}$ est une somme de caractères de représentations de Gel'fand-Graev généralisées dans laquelle $\Gamma_{u'_i}$ apparaît avec une multiplicité non nulle, il s'ensuit que $\langle \rho, D_G(\Gamma_{(\mathcal{O}', 1)}) \rangle_{G^F} = \langle D_G(\rho), \Gamma_{(\mathcal{O}', 1)} \rangle_{G^F}$ est non nul. Le produit scalaire $\langle \rho, D_G(\Gamma_{(\mathcal{O}', 1)}) \rangle_{G^F}$ étant un multiple non nul de $\text{vmp}(\mathcal{O}', \rho)$ (voir [11, (2.8) (a)]), nous en déduisons que $\text{vmp}(\mathcal{O}', \rho)$ n'est pas nul. \square

Corollaire 6.7. *Nous supposons que p et q sont suffisamment grands pour que les résultats de [23] soient applicables. Soit ρ un caractère irréductible de G^F qui appartient à $\mathcal{E}(G^F)_{s,c}$.*

Alors toute classe unipotente F -stable \mathcal{O} de G telle qu'il existe $u \in \mathcal{O}^F$ avec $\text{Tr}(u, \rho) \neq 0$ est contenue dans l'adhérence de Zariski de la classe

Démonstration. D'après la proposition 6.5 et le théorème 6.4, la classe \mathcal{O} est contenue dans l'adhérence de Zariski de la classe $\mathcal{O}_{s,c}$. \square

7. SUPPORTS UNIPOTENTS DES FAISCEAUX CARACTÈRES

7.1. Rappels sur les faisceaux caractères. Les faisceaux caractères sur G sont certains faisceaux pervers G -équivariants dans la catégorie dérivée des \mathbb{Q}_ℓ -faisceaux constructibles sur G , qui ont été introduits par Lusztig dans [21]. Nous notons \hat{G} leur ensemble et rappelons brièvement leur définition [21, Définition 2.10] et quelques résultats concernant leur classification.

Nous supposons que p est bon pour G , que le centre $Z(G)$ de G est connexe et que $G/Z(G)$ est simple. Soit T un tore maximal de G fixé et soit $W = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl de G associé. Pour tout $w \in W$, nous noterons \dot{w} un représentant de w dans $N_G(T)$. Soient G^* le dual de Langlands de G et $T^* \subset G^*$ un tore maximal dual de T . Nous fixons un sous-groupe de Borel B de G , contenant T , et de radical unipotent noté U . Si $g, h \in G$, nous poserons ${}^g B = gBg^{-1}$ et $g^h = h^{-1}gh$.

Soit \mathcal{B} la variété des sous-groupes de Borel de G . Pour tout $w \in W$, soient $O(w)$ la sous-variété de $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ définie par

$$O(w) = \{(B', B'') \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : \text{il existe } g \in G \text{ tel que } {}^g B' = B \text{ et } {}^g B'' = \dot{w}B\},$$

et $\pi_w : Y_w \rightarrow G$ le morphisme défini par la première projection : $\pi_w(g, B') = g$, où $Y_w = \{(g, B') \in G \times \mathcal{B} : (B', {}^g B') \in O(w)\}$. Soient $\text{pr}_{\dot{w}} : BwB \rightarrow T$ l'application définie par $\text{pr}_{\dot{w}}(u\dot{w}t u') = t$, pour $u, u' \in U$ et $t \in T$ et

$$\dot{Y}_w = \{(g, hU) \in G \times (G/U) : g^h \in BwB\}$$

L'application de \dot{Y}_w dans T définie par $(g, hU) \mapsto \text{pr}_w(g^h)$ est T -équivariante relativement à l'action $t_0: (g, hU) \mapsto (g, ht_0^{-1}(U))$ de T sur \dot{Y}_w et à l'action $t_0: t \mapsto (t_0^w t t_0^{-1})$ de T sur lui-même.

Soit $s \in T^*$. Nous notons (s) son orbite sous W et \mathcal{L}_s le système local de Kummer sur T correspondant. Soit W_s le groupe de Weyl relativement à T^* du centralisateur $G_s^* = C_{G^*}(s)$ de s (ce dernier groupe est connexe, puisque $Z(G)$ l'est). Pour tout $w \in W_s$, l'image inverse $\dot{\mathcal{L}}_s$ de \mathcal{L}_s sous $\dot{Y}_w \rightarrow T$ est T -équivariante et l'application $(g, hU) \mapsto (g, {}^hB)$ de \dot{Y}_w dans Y_w est une fibration principale de groupe T . Il existe donc un unique système local $\hat{\mathcal{L}}_s$ sur Y_w de rang 1 d'image inverse $\dot{\mathcal{L}}_s$ sous l'application $\dot{Y}_w \rightarrow Y_w$. La classe d'isomorphisme de $\hat{\mathcal{L}}_s$ est indépendante du choix du représentant w . Soit alors $K_w^s = (\pi_w)_! \hat{\mathcal{L}}_s$.

Nous notons \hat{G}_s l'ensemble des constituants des ${}^p H^i(K_w^s)$, pour $i \in \mathbb{Z}$. Il existe une surjection canonique de \hat{G}_s sur l'ensemble des W -orbites sur T^* , [21, Corollaire 11.4], et \hat{G}_s est l'ensemble des faisceaux caractères qui appartiennent à la fibre au-dessus de (s) de cette surjection.

Lusztig a défini une surjection canonique de \hat{G}_s sur l'ensemble des cellules bilatères de W_s en [21, Corollary 16.7]. Si \mathbf{c} est une cellule bilatère donnée de W_s , nous notons $\hat{G}_{s,\mathbf{c}}$ l'ensemble des faisceaux-caractères dans la fibre au-dessus de \mathbf{c} de cette surjection. L'ensemble $\hat{G}_{s,\mathbf{c}}$ est en bijection avec $\mathcal{M}(\mathcal{G}_{\mathcal{F}})$, où \mathcal{F} est la famille des représentations irréductibles de W_s correspondant à la cellule \mathbf{c} . Nous obtenons ainsi une partition de \hat{G}_s :

$$\hat{G}_s = \bigsqcup_{\mathbf{c}} \hat{G}_{s,\mathbf{c}},$$

où \mathbf{c} parcourt les cellules bilatères de W_s .

Pour tout $E \in \text{Irr}(W_s)$, nous noterons $\mathcal{R}_s(E)$ la combinaison linéaire rationnelle de faisceaux pervers sur G définie en [21, (14.10)] :

$$(11) \quad \mathcal{R}_s(E) = |W_s|^{-1} \sum_{w \in W_s} \text{Tr}(w^{-1}, E) \sum_i (-1)^{i + \dim G} {}^p H^i(K_w^s).$$

Un faisceau pervers A sur G est dit F -stable si F^*A et A sont isomorphes. On associe à tout couple (A, φ) , formé d'un faisceau pervers F -stable G -équivariant A sur G et d'un isomorphisme $\varphi: F^*A \xrightarrow{\sim} A$, une fonction centrale $\chi_{A,\varphi}$ sur G^F (à valeur dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$), appelée la *fonction caractéristique* de A associée à φ , définie par

$$\chi_{A,\varphi}(g) := \sum_i (-1)^i \text{Tr}(\varphi, \mathcal{H}_g^i(A)), \quad g \in G^F,$$

où $\mathcal{H}_g^i(A)$ désigne la fibre en g du i -ème faisceau de cohomologie $\mathcal{H}^i(A)$ de A et où l'on note encore φ l'application linéaire que φ induit sur $\mathcal{H}^i(A)$. Pour les faisceaux caractères de restriction non nulle à la variété unipotente il existe un choix canonique pour φ , indiqué en [20, (3.2)]. Nous noterons χ_A la fonction caractéristique correspondante à ce choix.

Le résultat suivant et sa démonstration sont extraits de la preuve de [23, Theorem 10.7 (i)].

Lemme 7.1. *Soient u un élément unipotent de G et A un faisceau caractère sur G , qui appartient à $\hat{G}_{s,\mathbf{c}}$, tel que $A|_{\{u\}} \neq 0$.*

Il existe alors un entier $m \geq 1$ et un caractère irréductible ρ dans série principale de G^{F^m} , qui appartient à $\mathcal{E}(G^F)_{s,\mathbf{c}}$, tels que $u \in G^{F^m}$ et $\text{Tr}(u, \rho) \neq 0$.

Démonstration. Quitte à passer dans un corps fini plus grand, nous pouvons supposer que $\mathcal{L}_s^{\otimes(q-1)} = \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ et qu'il existe un tore maximal T_0 de G défini et déployé sur \mathbb{F}_q . Nous pouvons aussi supposer que $u \in G^F$, que les faceaux caractères $A' \in \hat{G}_s$ sont F -stables et que les isomorphismes $F^*A' \xrightarrow{\sim} A'$ ont été choisis comme en [21, 13.8]. Ces isomorphismes donnent par composition des isomorphismes $\varphi_m: (F^m)^*A' \xrightarrow{\sim} A'$ pour tout entier $m \geq 1$ et tout $A' \in \hat{G}_s$. Nous noterons $\chi_{A',m} = \chi_{A',\varphi_m}$ la fonction caractéristique de A' associée.

Soit B_0 un sous-groupe de Borel F^m -stable de G contenant T_0 . Nous pouvons identifier T et T_0 et donc considérer \mathcal{L}_s comme un système local sur T_0 . En prenant la trace de \mathcal{L}_s en chaque point de $T_0^{F^m}$, nous obtenons un homomorphisme de groupe θ_m de $T_0^{F^m}$ dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$, qui s'étend (par action triviale sur le radical unipotent de B_0) en un homomorphisme $\tilde{\theta}_m$ de $B_0^{F^m}$ dans $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$. Les représentations irréductibles de G^{F^m} qui apparaissent dans la représentation induite de $B_0^{F^m}$ à G^{F^m} de $\tilde{\theta}_m$ sont en bijection avec les représentations de W_s . Nous noterons ρ_E la représentation correspondant à $E \in \text{Irr}(W_s)$. D'après [21, Corollaire 14.14], on a

$$(12) \quad \rho_E = (-1)^{\dim G} \sum_{A' \in \hat{G}_s} \xi_{A'}^m (A' : \mathcal{R}_s(E)) \chi_{A',m},$$

où $\xi_{A'} \in \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ est un nombre algébrique dont les conjugués complexes sont de valeur absolue 1 (comme remarqué en [20, (3.6)], le terme $\nu(A')$ de [21, Corollaire 14.14] est ici égal à 1, puisque le centre de G est connexe).

Rappelons que Lusztig a associé, en [21, (16.2.1)], à tout couple (w, E) formé d'un élément w de W_s et d'une représentation irréductible de W_s , un élément $c_{w,E}$ de $\bar{\mathbb{Q}}_\ell$ qui est un entier fois une racine de l'unité. L'appartenance de la représentation E à cellule bilatère \mathbf{c} est caractérisée par l'existence d'un élément w de \mathbf{c} tel que $c_{w,E}$ soit non nul.

Il résulte de (12) que

$$\begin{aligned} & \sum_{E \in \text{Irr}(W_s)} \sum_{w \in \mathbf{c}} c_{w,E} \rho_E(u) \\ &= (-1)^{\dim G} \sum_{A' \in \hat{G}_s} \xi_{A'}^m \sum_{w \in \mathbf{c}} (A' : \sum_{E \in \text{Irr}(W_s)} c_{w,E} \mathcal{R}_s(E)) \chi_{A',m}(u). \end{aligned}$$

Supposons que le membre de droite de l'équation ci-dessus soit nul pour tout $m \geq 1$. D'après [21, (16.10)],

$$(A' : \sum_{E \in \text{Irr}(W_s)} c_{w,E} \mathcal{R}_s(E))$$

est un entier positif ou nul. D'autre part, d'après [21, (24.6), (24.11)], [23, p.170], le terme $\chi_{A',m}(u)$ peut s'écrire comme une somme $\varepsilon_1 \lambda_1^m + \cdots + \varepsilon_r \lambda_r^m$, où chaque $\lambda_i \in \bar{\mathbb{Q}}_\ell$ est un nombre algébrique dont tous les conjugués complexes sont de valeur absolue égale à $q^{p_i/2}$ et où $\varepsilon_i = (-1)^{\dim G + p_i}$. Notre hypothèse implique donc que

$$\sum_{w \in \mathbf{c}} (A' : \sum_{E \in \text{Irr}(W_s)} c_{w,E} \mathcal{R}_s(E)) \chi_{A',m}(u) = 0,$$

pour tout $A' \in \hat{G}_s$ et tout $m \geq 1$. Mais, puisque $A_{\{u\}} \neq 0$, il existe un entier m_0 tel que $\chi_{A, m_0}(u) \neq 0$. Par conséquent,

$$\sum_{w \in \mathbf{c}} (A' : \sum_{E \in \text{Irr}(W_s)} c_{w,E} \mathcal{R}_s(E)) = 0.$$

Il s'ensuit donc que

$$(A' : \sum_{E \in \text{Irr}(W_s)} c_{w,E} \mathcal{R}_s(E)) = 0,$$

pour tout $w \in \mathbf{c}$. Ceci contredit l'hypothèse que $A \in \hat{G}_{s,\mathbf{c}}$. Il existe donc $w \in \mathbf{c}$, $m \geq 1$ et $E \in \text{Irr}(W_s)$, tels que

$$c_{w,E} \neq 0 \text{ et } \text{Tr}(u, \rho_E) \neq 0,$$

i.e., il existe $m \geq 1$ et $E \in \text{Irr}(W_s)$ tels que $\rho_E \in \mathcal{E}(G^{F^m})_{s,\mathbf{c}}$ et $\text{Tr}(u, \rho_E) \neq 0$. \square

Soit \mathcal{O} une classe unipotente dans G et soit \mathcal{E} un système local irréductible G -équivariant sur \mathcal{O} . Nous identifions le couple $(\mathcal{O}, \mathcal{E})$ avec le couple correspondant $\iota = (\mathcal{O}, \pi) \in \mathcal{N}_G$ et notons $\text{IC}(\bar{\mathcal{O}}, \pi)$ le complexe de cohomologie d'intersection sur l'adhérence de Zariski de \mathcal{O} associé. Nous posons $d_\iota = \dim \mathcal{O} + \dim \mathbf{Z}(L)$, où L est le sous-groupe de Levi attaché à ι par la correspondance de Springer généralisée. D'après [20, (2.6)(e)] et [19, 6.5], la restriction d'un faisceau caractère $A \in \hat{G}$ à G_{uni} s'écrit :

$$(13) \quad A|_{G_{\text{uni}}} = \sum_{\iota \in \mathcal{N}_G} m_{A,\iota} A_\iota, \text{ où } A_\iota = \text{IC}(\bar{\mathcal{O}}, \pi)[d_\iota],$$

et où les $m_{A,\iota}$ sont certains entiers naturels. Si la restriction de A à G_{uni} est non nulle, alors il existe au moins un ι tel que $m_{A,\iota} \neq 0$. Nous allons décrire ces entiers $m_{A,\iota}$: c'est l'objet de la proposition 7.2.

Soit A un faisceau caractère sur G dont la restriction à G_{uni} est non nulle. Il peut être obtenu comme facteur direct d'un "induit parabolique" $\text{ind}_L^G(A_0)$ d'un faisceau caractère cuspidal A_0 sur un sous-groupe de Levi L d'un sous-groupe parabolique de G , tel que la restriction de A_0 à L_{uni} est non nulle (ici ind_L^G désigne l'induction des faisceaux caractères définie en [21, §4]). Il existe un élément semi-simple $s \in T^*$ tel que $A_0 \in \hat{L}_s$ et les faisceaux caractères intervenant dans $\text{ind}_L^G(A_0)$ sont paramétrés par les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles du pseudo sous-groupe parabolique $W_{L,s} = \text{N}_{G_s^*}(L^*)/L_s^*$ du dual du groupe de Coxeter fini W_L^G . Nous notons $A_{E_1}^s$ le faisceau caractère défini par la représentation $E_1 \in \text{Irr}(W_{L,s})$.

Soient L_{ad} et L_{der} respectivement le groupe adjoint et le sous-groupe dérivé de L et soit $\text{pr}: L \rightarrow L_{\text{ad}}$ la projection canonique. D'après [21, (17.10)], il existe un faisceau caractère cuspidal \bar{A}_0 sur L_{ad} tel que $A_0 = \text{pr}^*(\bar{A}_0) \otimes \mathcal{L}$, où \mathcal{L} est un système local de Kummer sur L , qui est l'image réciproque d'un système local sur L/L_{der} sous l'application canonique $L \rightarrow L/L_{\text{der}}$. Soit $(L_{\text{der}})^* = L_{\text{ad}}^* \hookrightarrow L^*$ le plongement correspondant entre les groupes duaux. Si \bar{A}_0 appartient à $(\widehat{L_{\text{ad}}})_{\bar{s}}$, avec $\bar{s} \in T^* \cap (L^*)_{\text{der}}$, et \mathcal{L} correspond à l'élément central z de L^* , alors $A_0 \in \hat{L}_s$, où $s = \bar{s}z$. Remarquons que $L_s^* = L_{\bar{s}}^*$.

Les faisceaux caractères sur G qui interviennent dans $\text{ind}_L^G(\text{pr}^*(\bar{A}_0))$ sont eux paramétrés par les classes d'isomorphisme de représentations irréductibles du groupe

$W_L^G = N_{G^*}(L^*)/L^* \simeq W_{L, \bar{s}}$. Nous noterons $A_{E'}^{\bar{s}}$ le faisceau caractère défini par $E' \in \text{Irr}(W_L^G)$. La restriction de $A_{E'}^{\bar{s}}$ à G_{uni} est à support sur $\bar{\mathcal{O}}$ et égale à A_ι sur $\bar{\mathcal{O}}$, si $\iota = (\mathcal{O}, \pi) = \nu(E')$. Les faisceaux caractères A_0 et $\text{pr}^*(\bar{A}_0)$ ont même restriction à L_{uni} et l'on a

$$(14) \quad A_{E_1}^s = \bigoplus_{E'} (E' : \text{Ind}_{W_{L,s}^G}^{W_L^G}(E_1)) A_{E'}^{\bar{s}} \quad \text{sur } G_{\text{uni}},$$

où E' parcourt les représentations irréductibles de W_L^G , à isomorphisme près, et $(E' : \text{Ind}_{W_{L,s}^G}^{W_L^G}(E_1))$ désigne la multiplicité de E' dans la représentation induite $E = \text{Ind}_{W_{L,s}^G}^{W_L^G}(E_1)$, [21, (2.6)].

Nous allons maintenant rappeler la définition de la *correspondance de Springer généralisée*, due à Lusztig. Il s'agit d'une application qui étend la correspondance de Springer d'origine en une bijection

$$(15) \quad \nu: \bigsqcup \text{Irr}(W_L^G) \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_G,$$

l'union étant prise sur les classes de G -conjugaison de couples (L, ι_0) , où L est un sous-groupe de Levi de G et ι_0 un élément "cuspidal" de \mathcal{N}_L (l'existence d'un tel ι_0 impose des conditions sur L), et où $W_L^G = N_G(L)/L$. Le groupe W_L^G (voir [19] et [23, §4.4]) est un groupe de Coxeter. En particulier, cette application associe à tout couple $(\mathcal{O}, \pi) \in \mathcal{N}_G$ un certain sous-groupe de Levi L .

Lorsque G est un groupe exceptionnel, L est soit un tore soit le groupe G lui-même, et W_L^G est donc soit W soit le groupe trivial. Soit G_L le groupe de même type que G de groupe de Weyl W_L^G et $\mathcal{N}_{G_L}^{\text{ord}}$ l'image de $\text{Irr}(W_L^G)$ dans \mathcal{N}_{G_L} par la correspondance de Springer (non généralisée) pour le groupe G_L . Dans le cas des groupes classiques, il résulte de la classification des éléments cuspidaux de \mathcal{N}_L que W_L^G est de la forme suivante et l'ensemble $\mathcal{N}_{G_L}^{\text{ord}}$ est en bijection à la fois avec $\text{Irr}(W_L^G)$ et avec le sous-ensemble de l'ensemble des u -symboles paramétrant \mathcal{N}_G formé des u -symboles de défaut d , où d est défini comme suit.

	W_L^G	Défaut
Type B :	B_{n-2t^2-2t}	$d = 1 + 2t$
Type C :	$C_{n-(8t^2 \pm 2t)}$	$d = 1 \pm 4t$,
Type D :	$\begin{cases} D_n & \text{si } L = T \\ B_{n-8t^2} & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{matrix} d = 0 \\ d = 4t \end{matrix}$

où t est un certain entier positif (nul si et seulement si $L = T$).

Soit $\gamma: \mathcal{N}_{G_L}^{\text{ord}} \rightarrow \mathcal{N}_G$ le composé

$$\mathcal{N}_{G_L}^{\text{ord}} \xrightarrow{\simeq} W_L^G \xrightarrow{\nu} \mathcal{N}_G$$

qui est égal à l'inclusion canonique $\mathcal{N}_{G_L}^{\text{ord}} \hookrightarrow \mathcal{N}_G$, lorsque L est égal à T . Lusztig a donné des formules pour γ en termes des u -symboles lorsque G est un groupe classique et $L \neq T$ [19, §12.2 et §13.2], mais sa description n'est pas correcte dans le cas où G est de type C et l'image de \mathcal{N}_{G_L} consiste en des u -symboles de défaut négatif. Shoji a expliqué la correction dans [27, Remark 5.8] : dans ce cas-là, il faut employer une certaine bijection entre $\text{Irr}(W_L^G)$ et les u -symboles de défaut 1 différente que celle décrite à la Section 4. (*Caveat lector* : la formule (5.4.2) de [27], qui aurait dû être égale à celle de Lusztig selon le Remark 5.8, ne l'est pas. Nous remercions F. Lübeck pour nous avoir indiqué la correction : au cas de défaut positif, il faut remplacer l'expression " $B + (2d - 1)$ " par " $B + (2d - 2)$ ".) Cependant,

pour nos propres calculs à venir, il sera plus commode de conserver cette dernière bijection, et faire plutôt la modification au niveau des u -symboles. Les formules suivantes pour $\gamma(\bar{\xi}_L, \bar{\eta}_L)$, dans ce dernier cadre, se déduisent immédiatement de celles de Shoji :

$$(16) \quad \begin{array}{l} \text{Type } B : \\ \text{Type } C : \\ \text{Type } D : \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 & 2 & \cdots & 4t-2 & a_1+4t & \cdots & a_{m+1}+4t \\ & & & b_1 & \cdots & b_m & \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & \cdots & 8t-2 & a_1+8t & \cdots & a_{m+1}+8t \\ & & & b_1 & \cdots & b_m & \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & \cdots & 8t-5 & a_1+8t-3 & \cdots & a_{m+1}+8t-3 \\ 0 & 2 & \cdots & 8t-4 & a_1+8t-2 & \cdots & a_{m+1}+8t-2 \\ & & & b_1 & \cdots & b_m & \end{pmatrix} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{si } d \geq 1 \\ \text{si } d \leq -1 \end{array}$$

où nous avons posé $\bar{\xi}_L = (a_1 < \cdots < a_m \text{ (ou } a_{m+1}))$ et $\bar{\eta}_L = (b_1 < \cdots < b_m)$.

L'équation (14) s'écrit encore

$$(17) \quad A_{E_1}^s = \bigoplus_{E' \in \text{Irr}(W_L^G)} (E' : \text{Ind}_{W_{L,s}}^{W_L^G}(E_1)) A_{\nu(E')} \text{ sur } G_{\text{uni}}.$$

La proposition suivante se déduit immédiatement de (13) et (17).

Proposition 7.2. *Soit $A = A_{E_1}^s$ un faisceau caractère sur G , avec $E_1 \in \text{Irr}(W_{L,s})$. Alors*

$$m_{A,\iota} = \begin{cases} (E' : \text{Ind}_{W_{L,s}}^{W_L^G}(E_1)) & \text{si } \iota = \nu(E'), \text{ avec } E' \in \text{Irr}(W_L^G), \\ 0 & \text{si } \iota \notin \nu(\text{Irr}(W_L^G)). \end{cases}$$

Théorème 7.3. *Soit A un faisceau caractère non identiquement nul sur la variété unipotente. Il existe alors une classe unipotente \mathcal{O}_A sur laquelle la restriction de A n'est pas nulle et dont l'adhérence de Zariski contient toute classe unipotente sur laquelle cette restriction n'est pas nulle.*

Démonstration. Il existe un sous-groupe de Levi L de G , un élément semi-simple $s \in T^*$ et une représentation irréductible E_1 de $W_{L,s}$ tels que $A = A_{E_1}^s$. Notons Q le sous-ensemble de $\mathcal{N}_{G_L}^{\text{ord}}$ formé des éléments correspondant aux représentations E' de W_L^G telles que $(E' : \text{Ind}_{W_{L,s}}^{W_L^G}(E_1)) \neq 0$.

Nous traiterons les cas de G classique et de G exceptionnel séparément.

Pour G exceptionnel, les seules possibilités sont $L = G$ ou $L = T$, comme nous avons déjà remarqué. Dans le premier cas l'ensemble $\mathcal{N}_{G_L}^{\text{ord}}$ ne contient qu'un seul élément, et donc il est évident que $\gamma(Q)$ a la propriété cherchée. Le second cas résulte d'un calcul effectué à l'aide du logiciel CHEVIE.

Le faisceau caractère A étant supposé non identiquement nul sur la variété unipotente de G , il est facteur direct d'un induit $\text{ind}_L^G(A_0)$ où le faisceau caractère cuspidal A_0 sur L est non identiquement nul sur la variété unipotente de L . Pour G classique, A_0 satisfait cette condition seulement si s est d'ordre 2 (voir [21, (17.12) et §23]), auquel cas s est isolé. Nous pouvons alors appliquer le lemme 3.5. La conclusion de ce lemme, traduite dans le langage des u -symboles, dit qu'il existe un unique élément de Q dont le u -symbole $(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0)$ a la propriété que

$$(18) \quad \bar{\xi} \leq \bar{\xi}_0 \quad \text{et} \quad \bar{\eta} \leq \bar{\eta}_0$$

pour tout autre u -symbole $(\frac{\bar{\xi}}{\eta})$ qui est membre de Q . La description ci-dessus de γ montre que γ conserve la relation (18), et il est donc possible d'appliquer le lemme 3.2 aux éléments de $\gamma(Q)$. Le théorème découle alors de la relation (17). \square

Définition 7.4. La classe \mathcal{O}_A est appelée le *support unipotent* de A .

Théorème 7.5. *Soit A un faisceau caractère appartenant à $\hat{G}_{s,c}$. Alors la classe \mathcal{O}_A est contenue dans l'adhérence de Zariski de $\mathcal{O}_{s,c}$.*

Démonstration. Si p et q sont grands, le résultat se déduit immédiatement de la combinaison du lemme 7.1 et du corollaire 6.7.

On se ramène ensuite au cas p et q grands, en remarquant que les classes \mathcal{O}_A et $\mathcal{O}_{s,c}$ sont toutes deux définies au moyen de la correspondance de Springer et donc indépendamment de p et q , puisque p a été supposé bon pour G . \square

Pour tout $A \in \hat{G}_{s,c}$, nous posons

$$(19) \quad \mathcal{N}_G(A) = \{(\mathcal{O}, \pi) = \iota \in \mathcal{N}_G : \mathcal{O} = \mathcal{O}_{s,c} \text{ et } m_{A,\iota} \neq 0\}.$$

Cet ensemble apparaît déjà dans [11, Theorem 4.5].

Corollaire 7.6. *Soit $A \in \hat{G}_{s,c}$. L'ensemble $\mathcal{N}_G(A)$ est non vide si et seulement si \mathcal{O}_A est égale à $\mathcal{O}_{s,c}$.*

Démonstration. Le fait que $\mathcal{N}_G(A)$ soit non vide est équivalent au fait que la restriction de A à $\mathcal{O}_{s,c}$ soit non nulle. Le théorème 7.3 montre alors que la classe $\mathcal{O}_{s,c}$ est contenue dans l'adhérence de Zariski de \mathcal{O}_A . Le théorème 7.5 implique alors que les classes $\mathcal{O}_{s,c}$ et \mathcal{O}_A sont égales. \square

Remarque 7.7. Comme le montre l'exemple suivant, le support unipotent d'un faisceau caractère $A \in \hat{G}_{s,c}$, non identiquement nul sur la variété unipotente, peut être différent de $\mathcal{O}_{s,c}$. Soit G un groupe de type F_4 , et soit $s \in G^*$ un élément semi-simple tel que G_s^* soit de type $C_3 \times A_1$. Soit E_1 la représentation de W_s paramétrée par $([1 < 2], \emptyset) \boxtimes [2]$. Cette représentation n'est pas spéciale. La représentation spéciale dans sa cellule bilatère est la représentation $([2], [1]) \boxtimes [2]$, dont l'induction tronquée est la représentation de Springer de la classe spéciale $F_4(a_1)$. Nous avons donc identifié la classe $\mathcal{O}_{s,c}$. Pourtant, l'image par la correspondance de Springer des composantes de la représentation induite E de E_1 consiste en les quatre paires suivantes :

$$(F_4(a_2), 1), \quad (F_4(a_2), \epsilon), \quad (B_2, 1), \quad \text{et} \quad (B_2, \epsilon).$$

(Ici ϵ désigne l'unique représentation non triviale de $A(\mathcal{O})$). En particulier, la classe $\mathcal{O}_{s,c} = F_4(a_1)$ ne fait pas partie du support de E . Le faisceau caractère $A_{E_1}^s$ est donc de restriction nulle sur $\mathcal{O}_{s,c}$.

Remarquons de plus que la classe $F_4(a_2)$ est spéciale, mais que la représentation de W qui correspond au système local non trivial appartient à la cellule bilatère qui correspond à la classe spéciale $F_4(a_1)$, c'est-à-dire, à une cellule plus haute que celle à laquelle appartient la représentation de Springer de l'unique classe maximale. Donc la représentation induite de E_1 n'est pas bien supportée.

Remarque 7.8. Soit A le faisceau caractère intervenant dans $\text{ind}_L^G A_0$ qui correspond à la représentation triviale de $W_{L,s}^G$. Les calculs effectués ci-dessus montrent que \mathcal{O}_0 est l'unique plus grande classe sur laquelle la restriction de A n'est pas nulle. Ce faisceau caractère est alors un élément de $\hat{G}_{s,c}$ dont le support unipotent

est $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$. En particulier, ceci montre (en l'appliquant à $L = G$, où le groupe $W_{L,s}^G$ est alors réduit à $\{1\}$) que le support unipotent d'un faisceau caractère cuspidal appartenant à $\hat{G}_{s,\mathbf{c}}$ est égal à $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$.

8. SUPPORTS UNIPOTENTS DES CARACTÈRES

Le lien entre les caractères fantômes de G^F et les fonctions caractéristiques de faisceaux caractères F -stables sur G est fourni par une conjecture de Lusztig. La forme ci-dessous de cette conjecture a été prouvée par Shoji dans [26] : pour tout $x \in X(W_s)$, on a $R_x = \zeta_{A_x} \chi_{A_x}$, où $A_x \in \hat{G}_{s,\mathbf{c}}$ est paramétré par x et ζ_{A_x} est le nombre algébrique de module un associé à A_x par [21, Theorem 13.10.(b)].

Il en résulte, en particulier, que tout caractère irréductible ρ de G^F qui appartient à $\mathcal{E}(G^F)_{s,\mathbf{c}}$ est combinaison linéaire de fonctions caractéristiques $\chi_{A,\varphi}$, pour des faisceaux caractères $A \in \hat{G}_{s,\mathbf{c}}$. Le théorème suivant est alors une conséquence évidente du théorème 7.5.

Théorème 8.1. *Soit ρ un caractère irréductible de G^F appartenant à $\mathcal{E}(G^F)_{s,\mathbf{c}}$. Toute classe unipotente rationnelle sur laquelle la restriction de ρ est non identiquement nulle est contenue dans l'adhérence de Zariski de $\mathcal{O}_{s,\mathbf{c}}$.*

9. FRONT D'ONDE

Dans cette section, nous supposons p et q suffisamment grands pour pouvoir appliquer la formule [23, 7.5. (b)] (dans le cas particulier où $\iota_0 = (\mathcal{O}, 1)$). Le résultat principal de cette section (le théorème 9.1) raffine l'assertion (i) de [23, Theorem 11.2] : la condition d'inégalité de dimensions de classes unipotentes est remplacée par la condition analogue en termes d'ordre entre les classes. Lorsque G est de type A ou de type exceptionnel, ce résultat a été démontré par Kawanaka en [14, Th. 2.4.1].

Nous notons ε le caractère signe de W ainsi que la restriction de ce dernier à un sous-groupe W' de W . Pour toute cellule bilatère \mathbf{c} de W' , nous désignons par $\tilde{\mathbf{c}}$ la cellule bilatère de W' définie par la condition : E appartient à \mathbf{c} si et seulement si $E \otimes \varepsilon$ appartient à $\tilde{\mathbf{c}}$.

Théorème 9.1. *Soit ρ un caractère irréductible de G^F , et soient s et \mathbf{c} respectivement un élément semi-simple de G^* et une cellule bilatère de W_s tels que ρ appartienne à $\mathcal{E}(G^F)_{s,\mathbf{c}}$. Soient \mathcal{O} une classe unipotente F -stable dans G et u_1, \dots, u_r des représentants dans \mathcal{O}^F des classes de G^F -conjugaison contenues dans \mathcal{O} .*

S'il existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tel que $\langle \rho, \Gamma_{u_i} \rangle_{G^F} \neq 0$, alors \mathcal{O} est contenue dans l'adhérence de Zariski de la classe $\mathcal{O}_{s,\tilde{\mathbf{c}}}$.

Démonstration. Nous implémentons simplement la proposition 4.3 dans la preuve de [23, Theorem 11.2 (i)]. Soit $\iota = (\mathcal{O}, 1)$. Fixons $i \in \{1, \dots, r\}$. La multiplicité avec laquelle ρ intervient dans Γ_{u_i} est inférieure ou égale à la multiplicité avec laquelle ρ intervient dans la somme Γ_ι définie en (9).

D'après [23, p. 176], sur la variété unipotente :

$$\Gamma_\iota = |A(u_1)| \sum_{\substack{\iota \in T^* \\ E \in \text{Irr}(W_\iota)}} \sum_{E' \in \text{Irr}(W)} (E' : \text{Ind}_{W_\iota}^W E \otimes \varepsilon) P'_{\iota, E'} q^{\frac{1}{2}(\dim \mathcal{O}' - \dim \mathcal{O})} \chi_{A_E}^\iota,$$

où $\iota' = \nu(E') = (\mathcal{O}', \pi')$ et où $P'_{\iota, \iota'}$ est défini comme en [23, § 6.5]. Puisque ρ appartient à $\mathcal{E}(G^F)_{s, c}$, la multiplicité de ρ dans Γ_ι est égale sa multiplicité dans

$$|A(u_1)| \sum_{\substack{E \in \text{Irr}(W_s) \\ E \in c}} (E' : \text{Ind}_{W_s}^W E \otimes \varepsilon) P'_{\iota, \iota'} q^{\frac{1}{2}(\dim \mathcal{O}' - \dim \mathcal{O})} \chi_{A_E^s}.$$

Supposons qu'il existe i tel que $\langle \rho, \Gamma_{u_i} \rangle_{G^F} \neq 0$. Il existe alors $E \in \text{Irr}(W_s)$ et $E' \in \text{Irr}(W)$ tels que

$$(E' : \text{Ind}_{W_s}^W E \otimes \varepsilon) \neq 0 \quad \text{et} \quad P'_{\iota, \iota'} \neq 0.$$

La seconde des deux inégalités ci-dessus implique que la classe unipotente \mathcal{O} est contenue dans l'adhérence de Zariski de la classe \mathcal{O}' . D'autre part, il résulte de la première inégalité et de la proposition 4.3 que la classe \mathcal{O}' est elle-même contenue dans l'adhérence de Zariski de la classe $\mathcal{O}_{s, \bar{c}}$. \square

RÉFÉRENCES

- [1] P. Achar, *An order-reversing duality map for conjugacy classes in Lusztig's canonical quotient*, Transform. Groups **8** (2003), No. 2, 107–145.
- [2] P. Achar et E. Sommers, *Local systems on nilpotent orbits and weighted Dynkin diagrams*, Represent. Theory **6** (2002), 190–201.
- [3] A.-M. Aubert, *Character sheaves and generalized Springer correspondence*, Nagoya Math. Journal **170** (2003), 47–72.
- [4] D. Barbasch et D. Vogan, *Primitive ideals and orbital integrals in complex classical groups*, Math. Ann. **259** (1982), 153–199.
- [5] D. Barbasch et D. Vogan, *Primitive ideals and orbital integrals in complex exceptional groups*, J. Algebra **80** (1983), 350–382.
- [6] D. Barbasch et D. Vogan, *Unipotent representations of complex semisimple groups*, Ann. of Math. **121** (1985), 41–110.
- [7] R. Carter, *Finite Groups of Lie Type : Conjugacy Classes and Complex Characters*, John Wiley & Sons, New York, 1985.
- [8] P. Deligne et G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, Annals of Math. **103** (1976) 103–161.
- [9] H. Enomoto, *The characters of the finite Chevalley group $G_2(q)$, $q = 3^f$* , Japan. J. Math. **2** (1976) 191–248.
- [10] M. Geck, *On the average values of the irreducible characters of finite groups of Lie type on geometric unipotent classes*, Doc. Math., J. DMV **1** (1996) 293–317.
- [11] M. Geck, *Character sheaves and generalized Gelfand-Graev characters*, Proceedings of the London Math. Soc. **78**, 139–166 (1999).
- [12] M. Geck, G. Hiss, F. Lübeck, G. Malle, et G. Pfeiffer. *CHEVIE—A system for computing and processing generic character tables for finite groups of Lie type, Weyl groups, and Hecke algebras*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. **7** (1996), 175–210.
- [13] M. Geck et G. Malle, *On the existence of a unipotent support for the irreducible characters of a finite group of Lie type*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (1999), 429–456.
- [14] N. Kawanaka, *Shintani lifting and Gelfand-Graev representations*, Proc. Symp. Pure Math. **47** (1987), 147–163.
- [15] G. Lusztig, *On the finiteness of the number of unipotent classes*, Invent. math. **34** (1976), 201–213.
- [16] G. Lusztig, *Representations of finite Chevalley groups*. Expository lectures from the CBMS Regional Conference held at Madison, Wis., August 8–12, 1977, CBMS Regional Conference Series in Mathematics American Mathematical Society, Providence, R.I. **39** 1978.
- [17] G. Lusztig, *A class of irreducible representations of a Weyl group*, Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. **82** (1979) 323–335.

- [18] G. Lusztig, *Characters of Reductive Groups over a Finite Field*, Annals Math. Studies vol. **107**, Princeton University Press, 1984.
- [19] G. Lusztig, *Intersection cohomology complexes on a reductive group*, Invent. Math. **75** (1984) 205–272.
- [20] G. Lusztig, *On the character values of finite Chevalley groups at unipotent elements*, J. Algebra **104** (1986) 146–194.
- [21] G. Lusztig, *Character sheaves*, Advances in Math. **56** (1985) 193–237, **57** (1985) 226–265, **57** (1985) 266–315, **59** (1986) 1–63, **61** (1986) 103–155.
- [22] G. Lusztig, *On the representations of reductive groups with disconnected centre*, Orbites unipotentes et représentations, Astérisque **168** (1988) 157–166.
- [23] G. Lusztig, *A unipotent support for irreducible representations*, Advances in Math. **94** (1992) 139–179.
- [24] G. Lusztig, *Remarks on computing irreducible characters*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992) 971–986.
- [25] G. Lusztig, *Notes on unipotent classes*, Asian J. Math. **1** (1997), 194–207.
- [26] T. Shoji, *Character sheaves and almost characters of reductive groups*, I, II, Adv. Math. **11** 244–313, 314–354 (1995).
- [27] T. Shoji, *Unipotent characters of finite classical groups*, in “Finite Reductive Groups” (Luminy, 1994), Progr. Math **141**, Birkhäuser, Boston, 1997, 373–413.
- [28] T. Shoji, *Representation theory of finite Chevalley groups*, in the Proceedings of “Representation Theory of Finite and Algebraic Groups”, edited by N. Kawanaka et.al., Osaka University, (2000) 70–88.
- [29] E. Sommers, en préparation.
- [30] N. Spaltenstein, *Classes Unipotentes et Sous-groupes de Borel*, Lecture Notes in Mathematics, no. 946, Springer-Verlag, 1982.
- [31] J.-L. Waldspurger, *Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés*, Astérisque **269** (2001).
- [32] N. Xi, *Induced cells*, Proc. Amer. Math. Soc. **108** (1990), 25–29.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF CHICAGO, CHICAGO, IL 60637, USA
Adresse courriel : pramod@math.uchicago.edu

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU, UMR 7586 DU C.N.R.S., UNIVERSITÉ PIERRE
ET MARIE CURIE, F-75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE
Adresse courriel : aubert@math.jussieu.fr